C5 Fonctions affines

Définition

Une fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ est une fonction de la forme:

$$f(x) = ax + b.$$

Exemples :

1. soit f définie par $f(x) = 2x - 5$
   $f(x)$ est bien de la forme $ax + b$ avec $a = 2$ et $b = -5$, c'est donc une fonction affine.
2. soit g définie par $g(x) = -x + 2$
   $g(x) = -1x + 2$, $g(x)$ est bien de la forme $ax + b$ avec $a = -1$ et $b = 2$, c'est donc une fonction affine.
3. soit h définie par $h(x) = \dfrac{x}{2}$
   $h(x) = \frac{1}{2}x + 0$, $h(x)$ est bien de la forme $ax + b$ avec $a = 1/2$ et $b = 0$, c'est donc une fonction affine.

4. Soit m définie par $m(x) = \dfrac{2}{x} + 5$, m n'es pas une fonction affine car x est au dénominateur ; elle n'est pas de la forme ax+b

5. Soit n définie par $n(x) = 3x^2 + 6$, n n'est pas une fonction affine car x est élevé au carré

Représentation graphique

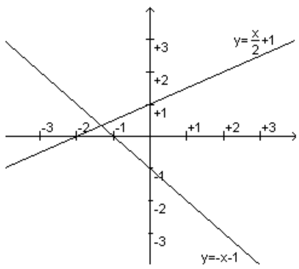
Le plan est muni d'un repère
Soit f la fonction affine définie par $f(x) = ax + b$.
La représentation graphique de f est **une droite**.
Cette droite est appelée **droite d'équation $y = ax + b$.**

Remarque : Comme la représentation graphique d'une fonction affine est une droite, il suffit de construire deux points pour la tracer. Pour éviter des erreurs il est cependant conseillé de construire un troisième point qui permet d'effectuer une vérification.

Exemples 2 : La figure donne les représentations graphiques des fonctions affines f et g définies par : $f(x) = \dfrac{x}{2} + 1$ et $g(x) = -x - 1$

Tableau de valeurs utilisé :

x	-2	0	2
$f(x)$	0	1	2
$g(x)$	1	-1	-3



Cas particuliers

Soit f la fonction affine définie par $f(x) = ax + b$. Lorsque l'un des deux paramètres a et b est égal à 0, on obtient une fonction affine particulière.

Si $a = 0$, on a $f(x) = b$. La fonction f est alors appelée **fonction constante**, sa représentation graphique est une droite parallèle à l'axe des abscisses du repère (horizontale) d'équation y =b
Si $b = 0$, on a $f(x) = ax$. La fonction f est alors appelée **fonction linéaire**, sa représentation graphique est une droite passant par l'origine du repère d'équation y = ax.
Les fonctions linéaires permettent de décrire les situations de proportionnalité, le paramètre a est alors le coefficient de proportionnalité.

Sens de variation d'une fonction affine

Soit f la fonction affine définie par $f(x) = ax + b$ avec $a \neq 0$.

Si a est positif, la fonction f est croissante, la droite représentation graphique de f **« monte »**.

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$

Si a est négatif, la fonction f est décroissante, la droite représentation graphique de f **«descend»**.

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$f(x)$	? $\searrow$?

Démonstration

a > 0 :

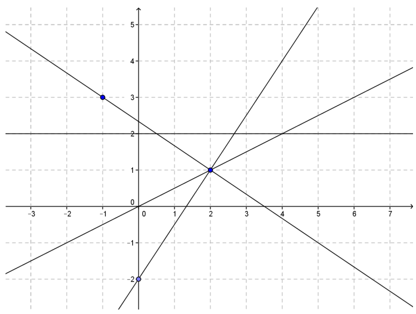
Si $x_1 < x_2$, alors $ax_1 < ax_2$ (l'ordre n'est pas modifié car on a multiplié par un nombre positif),
donc $ax_1 + b < ax_2 + b$ et finalement $f(x_1) < f(x_2)$. La fonction f conserve l'ordre des nombres ; elle est croissante

a < 0 :

Si $x_1 < x_2$, alors $ax_1 > ax_2$ (l'ordre est modifié car on a multiplié par un nombre négatif),
donc $ax_1 + b > ax_2 + b$ et finalement $f(x_1) > f(x_2)$. La fonction f inverse l'ordre des nombres ; elle est décroissante

D Déterminer l'expression de f (retrouver la formule!)

Déterminer graphiquementl'expression d'une fonction affine



Déterminer l'expression d'une fonction affine connaissant 2 points:la méthode est la même

Ordonnée à l'origine :Comme $f(0) = a \times 0 + b = b$, la droite représentant graphiquement la fonction f passe par le point de coordonnées $(0, b)$. C'est en ce point qu'elle coupe l'axe des ordonnées et c'est pourquoi on appelle le paramètre b **ordonnée à l'origine**.

Coefficient directeur :On a $f(x+1) = a(x+1) + b = ax + a + b = \mathbf{ax + b} + a = f(x) + a$.

Soit finalement : $f(x+1) = f(x) + a$ soit $\boldsymbol{f(x+1) - f(x) = a}$

Ce résultat peut s'interpréter de la façon suivante : **à chaque fois que l'on augmente *x* d'une unité, on augmente *f(x)* de *a* unités.**

Cette propriété permet de définir la direction que prend la droite d'équation $y = ax + b$, c'est pourquoi le paramètre a est appelé **coefficient directeur.**

$$\mathbf{a} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

E Signe d'une fonction affine

Equation ax + b = 0

L'équation $ax + b = 0$ (avec $a \neq 0$) a une solution unique qui est $x = \frac{-b}{a}$.
Cela signifie que la droite d'équation $y = ax + b$ coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $\left(\frac{-b}{a} ; 0\right)$.

Signe de ax + b

<u>Théorème :</u> Soit f(x) = ax+b et D sa représentation graphique (a ≠ 0)

- **Si a > 0 : f est croissante (D** *monte***)**

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
Signe de f(x) = ax + b		-	0	+	

- **Si a < 0 : f est décroissante (D** *descend***)**

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
Signe de f(x) = ax + b		+	0	-	

Méthode : tableau de signes

Exemple : 1) étudier, suivant les valeurs de x, le signe de (5x-1)(-2x+1)

- Je fais un tableau de 2 colonnes et 4 lignes :

x	
5x-1	
-2x+1	
(5x-1)(-2x+1)	

- 1° ligne : les valeurs de x. Attention, sur cette ligne, les valeurs de x doivent être placées dans l'ordre. On peut tout de suite placer $-\infty$, 0 et $+\infty$ pour ne pas l'oublier

Je résous $5x - 1 = 0 \Leftrightarrow 5x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5} = 0{,}2$ et je place 0,2 (après 0)

Je résous $-2x + 1 = 0 \Leftrightarrow -2x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} = 0{,}5$ et je place 0,5 (après 0,2)

x	$-\infty$	0	0,2	0,5	$+\infty$

- 2° ligne : signe de 5x – 1

5x-1 = 0 pour x = 0,2 donc je place 0 sous 0,2

5>0 donc la droite « monte » et 5x-1 est d'abord négative puis positive. Je note – avant 0 et + après

x	$-\infty$		0	0,2		0,5		$+\infty$
5x-1		-		0	+			

- 3° ligne : signe de -2x + 1

-2x+1 = 0 pour x = 0,5 donc je place 0 sous 0,5

-2<0 donc la droite « descend » et -2x+1 est d'abord positive puis négative. Je note + avant 0 et - après

x	$-\infty$		0	0,2	0,5		$+\infty$
-2x+1		+			0	-	

- 4° ligne : signe de (5x-1)(-2x+1)

J'applique la règle sur le produit de 2 nombres

Pour x appartenant à $]-\infty;0{,}2[$, 5x-1 est négatif et -2x+1 est positif donc leur produit est négatif

Pour x = 0,2, 5x-1 = 0 donc (5x-1)(-2x+1) = 0

Pour x appartenant à $]0{,}2;0{,}5[$, 5x-1 est positif et -2x+1 est positif donc leur produit est positif

Pour x = 0,5, -2x+1 = 0 donc (5x-1)(-2x+1) = 0

Pour x appartenant à $]0{,}5;+\infty[$, 5x-1 est positif et -2x+1 est négatif donc leur produit est négatif

x	$-\infty$		0	0,2		0,5		$+\infty$
5x-1		-		0	+		+	
-2x+1		+			+	0	-	
(5x-1)(-2x+1)		-		0	+	0	-	

2) Résoudre l'équation (5x-1)(-2x+1) > 0 :

Je repère sur la 4° ligne le signe +

Je lis sur la 1° ligne l'intervalle correspondant :]0,2;0,5[

3) Résoudre l'équation $(5x-1)(-2x+1) \leqslant 0$:

Je repère sur la 4° ligne les signes -

Je lis sur la 1° ligne les intervalles correspondants : $]-\infty;0{,}2] \cup [0{,}5 ; +\infty[$