C3 Les fonctions

1 Définitions

a) « en fonction de » :

En mathématiques, on dit **qu'une quantité y s'exprime en fonction d'une quantité x lorsque**, **à chaque nombre x possible**, **on peut associer une seule valeur de y.**

On note alors **f : x → y = f(x)** et x est appelé la variable.

Exemple 1 : Dans ce tableau, on a relevé le poids et la taille de Marguerite de 14 à 18 an et demi

Age (en année)	14	14.5	15	15.5	16	16.5	17	17.5	18	18.5
Poids (en kg)	42	44	42	48.5	52	56	63	62	60	60
Taille (en m)	1.50	1.50	1.52	1.55	1.60	1.64	1.69	1.70	1.72	1.72

L'affirmation « le poids de Marguerite s'exprime en fonction de son âge » est vraie : à chaque âge, est associé un unique poids

L'affirmation « la taille de Marguerite s'exprime en fonction de son poid » est fausse car au poid 42 kg est associé 2 tailles différentes:1,50 et 1,52

Remarque : Un nombre de l'ensemble de départ est associé à un et à un seul nombre de l'ensemble d'arrivéeMais plusieurs nombres de l'ensemble de départ peuvent être associés au même nombre de l'ensemble d'arrivée (le poid 42 est associé aux âges 14 et 15)

Définition 1 : Soit **D** une partie de l'ensemble des nombres réels IR.

Définir une fonction sur **D**, c'est associer à tout nombre réel x de **D** un unique nombre réel noté f(x).

On note f : $\mathbf{D} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow f(x)$

Remarque : f(x) désigne un nombre, f désigne la correspondance entre x et f(x)

L'ensemble des nombres de départ est appelé **ensemble de définition** de la fonction. Cet ensemble est en général un intervalle.

L'**image** de x par la fonction f est le nombre f(x). Un nombre de l'ensemble de définition a donc une et un seule image

Le nombre x est un **antécédent** du nombre f(x). Un nombre de l'ensemble d'arrivée peut avoir un ou plusieurs ou même aucun antécédent.

Exemple 2 : Poids de Marguerite en fonction de son âge

42 est l'image de 14

14 est un antécédent de 42. On remarque que 42 à un autre antécédent : 15

Exemple 3 : f est la fonction définie sur IR par $f(x) = 3(x-1)^2$

1) Calculer l'image de 2
2) Calculer f(-3)
3) Déterminer les antécédents éventuels de 0 ; -2 ; 12
4) Résoudre l'équation f(x) = 0

b) Différentes représentation

Une fonction peut-être décrite de différentes façons :

<u>Exemple 4 :</u>

Un algorithme (description d'un calcul de l'expression f(x)) :

Choisir une valeur

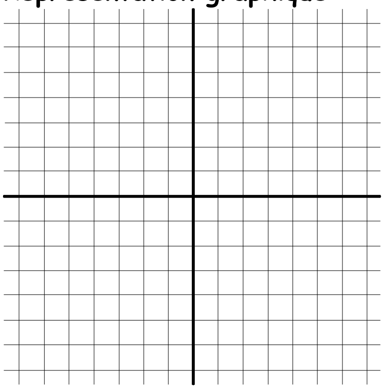
Elever au carré
Multiplier le résultat par 0.75
Soustraire au résultat le double de la valeur choisie
Soustraire 3 au résultat
Afficher le résultat

Expression algébrique : $f(x) =$

Tableau de valeurs :

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
f(x)															

Représentation graphique :



<u>Exemple 5 :</u>

Expression algébrique : $f(x) =-x^2 + 4x + 2$

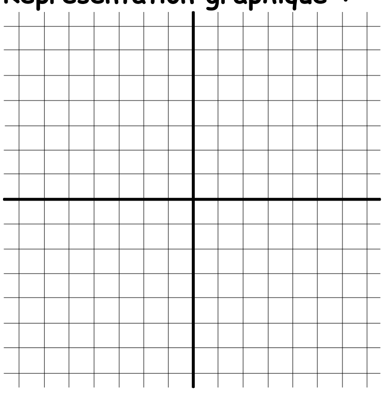
Tableau de valeurs :

x	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
f(x)													

Algorithme :

Choisir une valeur ....

Représentation graphique :



Définition 2 : Une fonction peut-être traduite dans différents registres :

- Une formule algébrique :

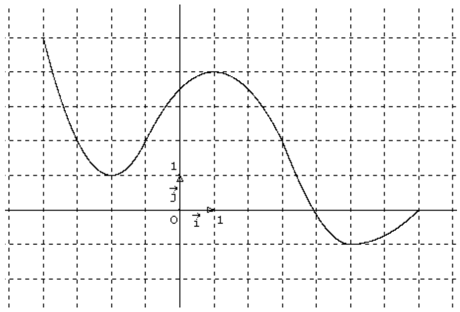
$$f : \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & f(x) = \ldots \end{array}$$

- Un tableau de valeurs :

x	…
f(x)	…

- Une courbe : la représentation graphique d'une fonction f est l'ensemble des points de coordonnées (x , f(x)), pour tous les réels x de l'ensemble de définition.
  Pour tracer la représentation graphique d'une fonction, il faut donc d'abord compléter un tableau de valeurs puis placer tous les points dans un repère et les relier (sans utiliser de règle !)

Exemple 6 : On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f



1. Préciser l'ensemble de définition

2. a) Déterminer graphiquement l'image de 5 par la fonction f.

b) Donner $f(-4)$.

3. a) Déterminer s'ils existent, les antécédents de 2 par la fonction f.

b) Déterminer s'ils existent, les antécédents de – 2 par la fonction f.

Propriété 1 : f est une fonction définie sur D de courbe représentative $\mathcal{C}_f$ et M (a;b) un point.

(1) Si b = f(a) alors le point M appartient à $\mathcal{C}_f$

(2) Réciproquement, si M appartient à $\mathcal{C}_f$ alors b = f(a)

(3) Si b $\neq$ f(a) alors le point M n'appartient pas à $\mathcal{C}_f$

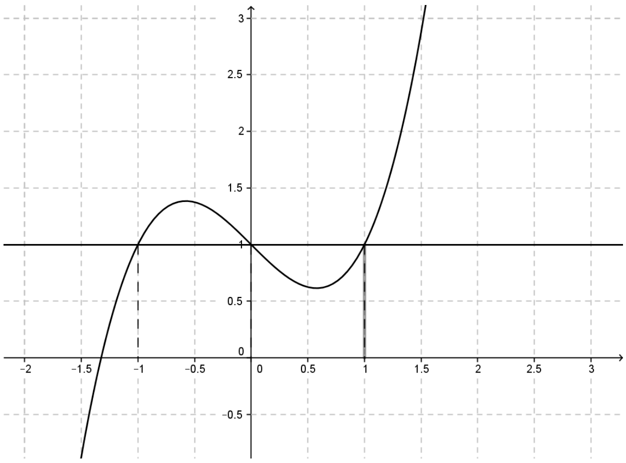
2. Résolutions graphiques

$\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère

a) Résolution graphique d'équations

Propriété 2 : les solutions de l'équation f(x) = a (a étant un nombre)sont les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ avec la droite horizontale passant par le point de coordonnées (0;a)

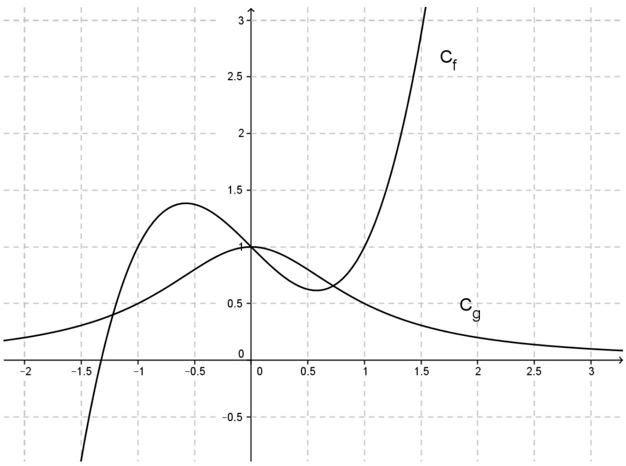
Exemple 7:



L'équation f(x) = 1 admet 3 solutions : -1 ; 0 et 1
Autrement dit : 1 admet 3 antécédents : -1;0 et 1
Parfois, on ne peut pas lire la valeur exacte des solutions ; on en donne alors une valeur approchée.

Propriété 3 : les solutions de l'équation f(x) = g(x) sont les abscisses des points d'intersection des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$

Exemple 8:



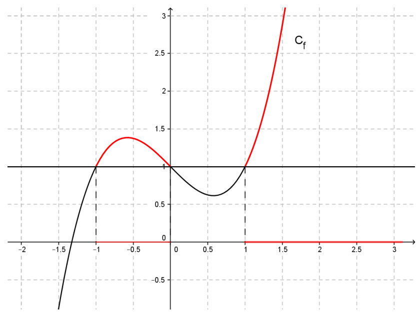
L'équation f(x) = g(x) admet 3 solutions

b) Résolution graphique d'inéquations

Propriété 4 : les solutions de l'équation $f(x) > a$ (a étant un nombre)sont les abscisses des points de la courbe $\mathcal{C}_f$ situés au dessus de la droite horizontale passant par le point de coordonnées (0;a)

Remarque: $f(x) \geqslant a$: au dessus + point d'intersection
$f(x) < a$: au dessous
$f(x) \leqslant a$: au dessous + point d'intersection

Exemple 9:

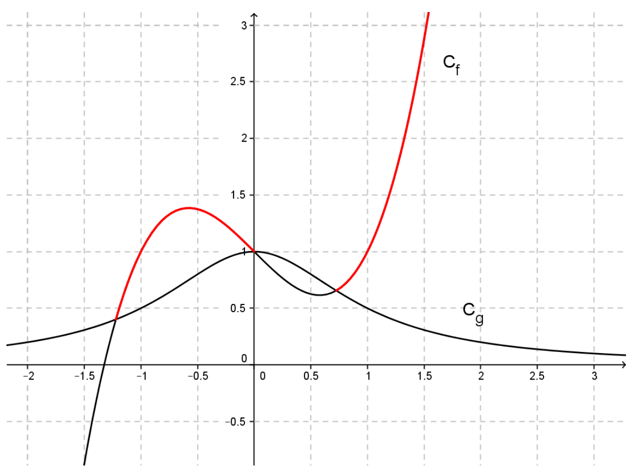


L'inéquation $f(x) > 1$ a pour solution les nombres de $]-1;0[\cup]1;+\infty[$

L'inéquation $f(x) \geqslant 0$ a pour solution $[\ \alpha\ ; +\infty[$ avec $\alpha \approx 1{,}32$
Autrement dit: La fonction f est positive sur $[\ \alpha\ ; +\infty[$ avec $\alpha \approx 1{,}32$

Propriété 5 : les solutions de l'équation $f(x) > g(x)$ sont les abscisses des points de la courbe $\mathcal{C}_f$ situés au dessus de la courbe $\mathcal{C}_g$

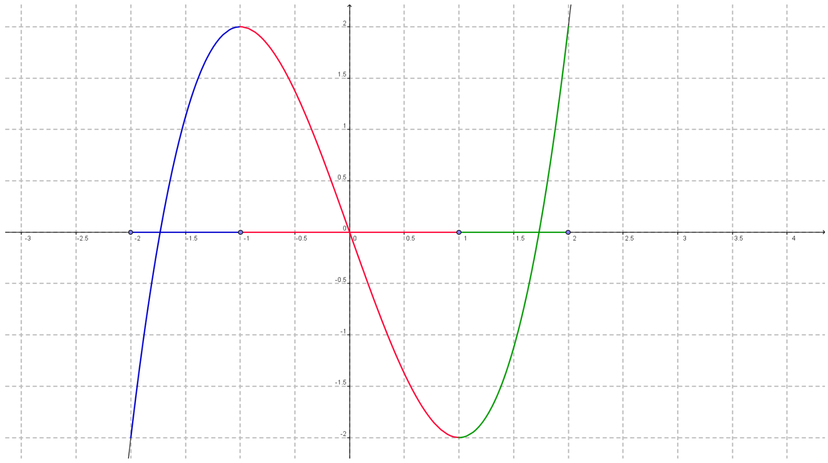
Exemple 10:



3. Variations

Idées intuitives :

f es la fonction définie sur [-2;2] par la courbe ci-dessous.



x	-2		-1		1		2
$f(x)$	-2	↗	2	↘	-2	↗	2

Minimum de f sur [-1;1]

Le point de coordonnées (1;-2) est « le plus bas de la courbe » sur [-1;1]

On dit que -2 est le minimum de f sur [-1;1] ; il est atteint pour x=-1

Maximum de f sur [-2;1]

Le point de coordonnées (-1;2) est « le plus haut de la courbe » sur [-2;1]

On dit que 2 est le maximum de f sur [-2;1] ; il est atteint pour x=-1

Traductions algébriques :

Définitions 3 :

Dire que f est croissante sur l'intervalle I signifie que , pour tous nombres a et b appartenant à I, si $a \leqslant b$ alors $f(a) \leqslant f(b)$.	Dire que f est décroissante sur l'intervalle I signifie que , pour tous nombres a et b appartenant à I, si $a \leqslant b$ alors $f(a) \geqslant f(b)$.
Une fonction croissante conserve l'ordre (f(a) et f(b) sont rangés dans le même ordre que a et b)	Une fonction décroissante change l'ordre (f(a) et f(b) sont rangés dans l'ordre contraire de a et b)

Exemple 12 :

La fonction f est croissante sur [-2;-1]

$-2 \in [-2;-1]$ et $-1,5 \in [-2;-1]$

$-2 \leqslant -1,5$ donc $f(-2) \leqslant f(-1)$

La fonction f est décroissante sur [-1;1]

$0 \in [-1;1]$ et $1 \in [-1;1]$

$0 \leqslant 1$ donc $f(0) \geqslant f(1)$

Attention : on ne peut comparer les images de 2 nombres que s'ils appartiennent à un intervalle sur lequel la fonction est soit croissante soit décroissante. Ainsi, on ne peut pas comparer f(-2) et f(0) ou f(-1,5) et f(1,5) !