ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2009, том 427, № 4, с. 458–460

МАТЕМАТИКА

УДК 519.174 + 519.176

О НИЖНИХ ОЦЕНКАХ ЧИСЕЛ НЕЗАВИСИМОСТИ НЕКОТОРЫХ ГРАФОВ РАССТОЯНИЙ С ВЕРШИНАМИ В $\{-1, 0, 1\}^n$

© 2009 г. В. К. Любимов, А. М. Райгородский

Представлено академиком В.В. Козловым 15.01.2009 г.

Поступило 22.01.2009 г.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В настоящей работе мы рассмотрим следующий граф $\mathcal{G}_n = (\mathcal{V}_n, \mathcal{E}_n)$, $n = 2k$:

$$\mathcal{V}_n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \colon x_i \in \{-1, 0, 1\},$$
$$|\{i \colon x_i = 0\}| = k,$$
$$x_m = 1 \text{ при } m = \min\{i \colon x_i \neq 0\}\},$$
$$\mathcal{E}_n = \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \colon (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0\}.$$

Таким образом, вершины нашего графа суть все возможные n-мерные (–1, 0, 1)-векторы, у которых половина нулевых и половина ненулевых координат, причем первая ненулевая координата каждого вектора равна единице ($|\mathcal{V}_n| = C_n^k \cdot 2^{k-1}$); ребра нашего графа – это пары ортогональных вершин. Граф $\mathcal{G}_n$ называется дистанционным (или графом расстояний), поскольку ребрами в нем соединены вершины, отстоящие друг от друга на фиксированное расстояние.

Графы $\mathcal{G}_n$ играют огромную роль в решении классических проблем Борсука и Нелсона–Эрдеша–Хадвигера в комбинаторной геометрии (см. [1–5]). Их изучение глубоко мотивировано работами [3, 4, 6].

В данном сообщении нас будут интересовать нижние оценки числа независимости графа $\mathcal{G}_n$, т.е. величины

$$\alpha(\mathcal{G}_n) = \max\{|V| \colon V \subset \mathcal{V}_n,$$
$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V,\ \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \notin \mathcal{E}_n\},$$

равной максимальному размеру независимого множества вершин графа, т.е. множества вершин, которые попарно не соединены ребрами (в данном конкретном случае попарно не ортогональны).

В следующем разделе сформулируем старые и новые результаты, а также приведем некоторые гипотезы. В разделе 3 скажем несколько слов о приложениях к проблемам Борсука и Нелсона–Эрдеша–Хадвигера.

2. ФОРМУЛИРОВКИ РЕЗУЛЬТАТОВ

Практически очевидным является

Утверждение 1. *Выполнена оценка* $\alpha(\mathcal{G}_n) \geq C_{n-1}^{k-1}$.

Менее тривиально

Утверждение 2. *Выполнена оценка* $\alpha(\mathcal{G}_n) \geq 2^{n-2}$, *коль скоро k нечетно.*

Ясно, что при всех нечетных k результат утверждения 2 не хуже (а при $k \geq 3$ строго лучше) результата утверждения 1.

В работах [4, 7] сформулирована

Гипотеза 1. *Вероятно*, $\alpha(\mathcal{G}_n) = C_{n-1}^{k-1} = (2 + o(1))^n$ *при четных k.*

В книге [6] показано, что гипотеза 1 неверна. А именно там предложена многопараметрическая конструкция, которая при определенном выборе параметров дает, например, оценку $\alpha(\mathcal{G}_n) \geq (2.07\ldots + o(1))^n$.

Основным результатом данной работы является

Теорема 1. *Пусть m – неотрицательное целое число, удовлетворяющее неравенству $3m + 1 \leq k$. Тогда*

$$\alpha(\mathcal{G}_n) \geq \sum_{i=0}^{m} \sum_{u=0}^{i} C_{2m+1}^{m+1+i} C_{n-2m-1}^{u} C_{n-2m-1-u}^{k-m-i-u-1}.$$

Условие $3m + 1 \leq k$ обеспечивает корректность всех величин, фигурирующих в теореме.

Московский государственнвый университет им. М.В. Ломоносова

Московский физико-технический институт (Государственный университет), Долгопрудный Московской обл.

Оно, однако, не является ограничительным. Справедливо

Следствие 1. *Пусть m, i – корни системы уравнений*

$$(2m)^2\left(\frac{1}{2}-m-2i\right)\left(\frac{1}{2}-m+i\right) = (1-2m)^2(m+i)(m-i),$$

$$(m-i)\left(\frac{1}{2}-m-2i\right)^2 = i(m+i)\left(\frac{1}{2}-m+i\right)$$

вида

$$m = 0.128065270808968445457756145424\ldots,$$
$$i = 0.057801221073297167598668902986\ldots$$

Тогда при

$$\gamma = \frac{(2m)^{2m}(1-2m)^{1-2m}}{(m+i)^{m+i}(m-i)^{m-i}(i)^i\left(\frac{1}{2}-m-2i\right)^{\frac{1}{2}-m-2i}\left(\frac{1}{2}-m+i\right)^{\frac{1}{2}-m+i}} = 2.2412703\ldots$$

имеем $\alpha(\mathcal{G}_n) \geq (\gamma + o(1))^n$.

Ясно, что γ куда больше, нежели 2.07… Заметим, что наилучшая известная оценка для $\alpha(\mathcal{G}_n)$ сверху имеет вид $\alpha(\mathcal{G}_n) \leq (2.4626\ldots + o(1))^n$ (см. [6]). По-видимому, правильна все-таки нижняя оценка.

Гипотеза 2. *Вероятно*, $\alpha(\mathcal{G}_n) = (\gamma + o(1))^n$.

Стоит отметить, что при нечетных $k \leq 9$ оценка из утверждения 2 сильнее оценки из теоремы 1. Поэтому лишь с некоторой натяжкой можно поверить в следующую гипотезу.

Гипотеза 3. *Возможно, при всех* $k \geq 10$ *и при любых четных* $k < 10$ *оценку из теоремы* 1 *нельзя увеличить даже на единицу. Вероятно, то же самое можно сказать про оценку из утверждения* 2, *коль скоро* k *нечетно и не превосходит* 9.

Если все же принять гипотезу 3, то по модулю ее недоказанности имеем таблицу значений числа независимости при $n \leq 26$ (эти значения заведомо являются нижними оценками интересующей нас величины) (табл. 1).

3. ПРИЛОЖЕНИЯ К ПРОБЛЕМАМ БОРСУКА И НЕЛСОНА–ЭРДЕША–ХАДВИГЕРА

Напомним, что проблема Борсука состоит в отыскании минимального числа $f(n)$ частей меньшего диаметра, на которые разбивается произвольное ограниченное неодноточечное множество в $\mathbb{R}^n$. Известно, например, что

$$(1.2255\ldots + o(1))^{\sqrt{n}} \leq f(n) \leq (1.224\ldots + o(1))^n$$

(см. [1–6]).

Проблема Нелсона–Эрдеша–Хадвигера сводится к нахождению величины $\chi(\mathbb{R}^n)$, которая называется хроматическим числом пространства и равняется наименьшему количеству цветов, необходимых для такой покраски $\mathbb{R}^n$, что между одноцветными точками нет расстояния 1. Известно, например, что

$$(1.239\ldots + o(1))^n \leq \chi(\mathbb{R}^n) \leq (3 + o(1))^n$$

(см. [3, 5, 6]). Кроме того, имеется следующая таблица нижних оценок в малых размерностях (см. [3, 5, 8, 9]):

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$\chi(\mathbb{R}^n) \geq$	2	4	6	7	9	11	15	16	17	18	20	24	31	35	37	67

Имеют место следующие три теоремы.

Теорема 2. *Если верна гипотеза* 2, *то* $f(n) \geq (1.389\ldots + o(1))^{\sqrt{n}}$.

Теорема 3. *Если верна гипотеза* 2, *то* $\chi(\mathbb{R}^n) \geq (1.262\ldots + o(1))^n$.

Таблица 1

Размерность n	Значение величины $\alpha(\mathcal{G}_n)$	Метод получения нижней оценки
2	1	Тривиально
4	3	Почти тривиально
6	16	Утверждение 2
8	40	Теорема 1
10	256	Утверждение 2
12	714	Теорема 1
14	4096	Утверждение 2
16	14025	Теорема 1
18	65536	Утверждение 2
20	287573	Теорема 1
22	1317771	Теорема 1
24	6184906	Теорема 1
26	28886536	Теорема 1

Т е о р е м а 4. *Если верна гипотеза* 3, *то приведенную выше таблицу результатов в малых размерностях можно заменить на следующую*:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$\chi(\mathbb{R}^n) \geq$	2	4	6	7	9	11	15	16	17	18	20	42	42	54	54	118

Заметим, что в последней теореме улучшения прежних оценок возникают начиная с $n = 12$, причем на нечетные n мы "перетягиваем" эти улучшения просто по монотонности хроматического числа. Разумеется, здесь возможны дальнейшие уточнения, но они не меняют сути дела.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 06–01–00383 и 09–01–00294), гранта Президента РФ МД–5414.2008.1, гранта поддержки Ведущих научных школ НШ–691.2008.1, гранта фонда "Династия".

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Болтянский В.Г., Гохберг И.Ц.* Теоремы и задачи комбинаторной геометрии, М.: Наука, 1965.
2. *Райгородский А.М.* В сб.: Итоги науки и техники. Сер. Современная математика. М.: ВИНИТИ, 2007. Т. 23. С. 147–164.
3. *Райгородский А.М.* // УМН. 2001. Т. 56. № 1. С. 107–146.
4. *Raigorodskii A.M.* // London Math. Soc. Lect. Note Ser. 2007. V. 347. P. 202–248.
5. *Brass P., Moser W., Pach J.* Research Problems in Discrete Geometry. B.: Springer, 2005.
6. *Райгородский А.М.* Линейно-алгебраический метод в комбинаторике. М.: МЦНМО, 2007.
7. *Райгородский А.М.* // УМН. 2002. Т. 57. № 3. С. 159–160.
8. *Székely L.A.* // J. Bolyai Math. Soc. 2002. V. 11. P. 649–666.
9. *Cibulka J.* // Geombinatorics. 2008. V. 18. № 2. P. 53–66.