УДК 511.2

В.И.Рахман

‘*Mirabilem sane*’ доказательство-1637

(*реконструкция*)

Представленное Пьером Ферма доказательство случая биквадратов в ‘последней теореме’ (**ПТФ**) не является основанием для сомнений в наличии у него неизвестного полного, т.к. частный случай с $N = 4$ имеет и незамысловатые доказательства.

Действительно, достаточно считать в уравнении условия теоремы :

$$X^N + Y^N = Z^N, - \qquad [1]$$

X, Y и Z попарно простыми, N – простым числом или $N = 4$, - и принять за X слагаемое, взаимно простое с таким N, чтобы в форме :

$$Z^N - Y^N = X^N, - \qquad [2]$$

левая часть оказалась произведением двух взаимно простых скобок $(Z - Y)(Z^{N-1} + Z^{N-2}Y^N + \ldots)$, приравниваемых соответственно двум взаимно простым сомножителям числа X^N в роли независимых параметров :

$$X \equiv QP, \quad P > Q \geq 1, -$$

что даёт необходимое условие существования попарно простой тройки Ферма (**ТФ***, как и **ТФ** – *примитивных* подобий **ТФ*** **-** с общим множителем) :

$$Z - Y = Q^N, - \qquad [3\text{-}1]$$

а также - алгебраическое уравнение порядка N–1 для Y или Z :

$$(Y + Q^N)^N - Y^N = Q^N P^N = Z^N - (Z - Q^N)^N . \qquad [3\text{-}2]$$

При $N = 2$ это решение представляет собой *старинный рецепт* получения всех оригинальных (попарно простых) троек Пифагора (**ТП***) :

$$\text{(нечётн.)} \quad X = qp, \quad Y = (p^2 - q^2)/2, \quad Z = (p^2 + q^2)/2. \qquad [4]$$

Правая часть уравнения $Z^N - Y^N = Q^N P^N$, как и его левая часть, дающая условие [3-1] в силу тождества $a^N - b^N \equiv (a - b)(a^{N-1} + a^{N-2}b + \ldots)$, подчинена другому алгебраическому тождеству $4ab \equiv (a + b)^2 - (a - b)^2$, которое при $a = P^N$ и $b = Q^N$ утверждает для $X^N = Q^N P^N$ форму :

$$P^N Q^N \equiv [(P^N + Q^N)/2]^2 - [(P^N - Q^N)/2]^2, - \qquad [5]$$

как и всегда, разности квадратов (чётных степеней) двух одночленов.

Нечётность потенциальных значений N вынуждает согласовать [5] с уравнением $Z^N - Y^N = X^N = P^N Q^N$ достаточным дополнением :

$$P^N Q^N \equiv \{ [(P^N + Q^N)/2]^2 + W \} - \{ [(P^N - Q^N)/2]^2 + W \},$$

где W - некая функция P, Q и N, такая что :

$$Z^N = [(P^N + Q^N)/2]^2 - W ; \qquad Y^N = [(P^N - Q^N)/2]^2 - W, -$$

и необходимое условие существования **ТФ*** принимает вид :

$$Z - Y = \{[(P^N + Q^N)/2]^2 - W\}^{1/N} - \{[(P^N - Q^N)/2]^2 - W\}^{1/N} = \mathbf{F}_{(W,N,P,Q)} = Q^N, -$$

или целесообразнее - $\mathbf{G}_{(W,N,P,Q)} = \mathbf{F}_{(W,N,P,Q)} /Q^N = 1$.

Для чётных $N = 2m$, когда ненужное $W \equiv 0$, решение уравнения

$$Z^{2m} - Y^{2m} = X^{2m} \quad \text{в форме} \quad (Z^m)^2 - (Y^m)^2 = (^m)^2 = (Q^m P^m)^2,$$

т. е. как тройки Пифагора с $qp = Q^m P^m$, даёт по [4] натуральные числа :

$$Z^m = (P^{2m} + Q^{2m})/2 \quad \text{и} \quad Y^m = (P^{2m} - Q^{2m})/2, -$$

с разностью $Z^m - Y^m = Q^{2m} \geq Z - Y$. И только при $m = 1$ выполняется необходимое $\mathbf{G}(0,2,P,Q) \equiv 1$, причём тождественно – для всех пар Q и P. Существование **ТП*** - **ТФ***$_{N=2}$ - известно, и **ПТФ** верна для чётных N.

$\mathbf{G}(W; N,P,Q)$ - как гладкая функция от W - монотонно возрастает :

$$(NQ^N)\, \mathbf{G}_W' = - \{[(P^N + Q^N)/2]^2 - W \}^{1/N -1} + \{[(P^N - Q^N)/2]^2 - W \}^{1/N -1} > 0, -$$

в области определения $\underline{W \in (- \infty,\ [(P^N - Q^N)/2]^2)}$, т.е. в пределах :

$\lim_{W \to -\infty} \mathbf{G} = 0$; $\lim_{Y \to 0} \mathbf{G} = Q^{-N}\{[(P^N + Q^N)/2]^2 - [(P^N - Q^N)/2]^2\}^{1/N} = PQ^{1-N} = P$

(поскольку результату $\mathbf{F} = Q^N \mathbf{G} = Z - Y = PQ = X$ отвечает $N = 1$).

Монотонность же изменения $\mathbf{G}_{P,Q,N}(W)$ означает, что $\mathbf{G}_{P,Q}(W, N)$ - как гладкая поверхность - при любых P, Q может иметь только одно сечение W = *const* с точками $\mathbf{G}_{(W,N,P,Q)} = 1$. А так как при любых P, Q есть сечение $\mathbf{G}_{P,Q}(W{=}0, N)$ с $\mathbf{G}(0,2,P,Q) \equiv 1$, то именно оно - единственно, и нечётные значения N в [1] исключены, как и чётные кроме N = 2.

Т.о., **ПТФ** целиком справедлива.

Для частного же случая биквадратов две наиболее простые схемы доказательства - предъявить несоответствие при N = 4 необходимому условию либо использовать запрет тройкам Пифагора иметь два общих элемента, отвечающий свойству *второго* тождества $4ab \equiv S^2 - R^2$, где $S = a + b$ и $R = a - b$, - порождающего **ТП*** подстановкой целых взаимно простых $a > b > 0$ разной чётности, возведённых в чётные степени .

У двух разных примеров тождества - для определённости $S_1 > S_2$ - не могут быть общими оба нечётных числа $R_1 < S_1 > S_2 > R_2$, т.к. $S_1 > R_2$, а когда $a_1b_1 = a_2b_2$ - с общим чётным числом, - невозможно и $S_2 = R_1$, т.е. $a_2 + b_2 = a_1 - b_1$, поскольку $b_2 = a_1 - b_1 - a_2$ и $a_1b_1 = a_2(a_1 - b_1 - a_2)$ дают квадратное уравнение $a_2^2 - (a_1 - b_1)a_2 + a_1b_1 = 0$ с дискриминантом $D = (a_1 - b_1)^2 - 4a_1b_1$, не являющимся квадратом целого числа $V \equiv qp$ при $a_1 = A^2$ и $b_1 = B^2$, т.к., если $D = (A^2 - B^2)^2 - 4A^2B^2 \equiv q^2p^2$, то по [4] :

$$A^2 - B^2 = (p^2 + q^2)/2 \; ; \qquad [6]$$

$$2AB = (p^2 - q^2)/2 \quad \text{или} \quad 4AB = p^2 - q^2, \; -$$

а последнее - всё по тому же *второму* тождеству требует :

$$p = A + B \; , \quad q = A - B, \; -$$

что несовместимо с [6] :

$$A^2 - B^2 \neq (p^2 + q^2)/2 = A^2 + B^2 .$$

Т.о, две **ТП*** не могут иметь ровно два общих элемента – в прямом соответствии с *указанной* Пьером Ферма невозможностью представить квадратом разность биквадратов $Z^4 - Y^4 = (Z^2 + Y^2)(Z^2 - Y^2) \neq (PQ)^2$.

*   *   *

Аннотация. Уравнение «последней теоремы» Ферма (**ПТФ**) в форме $Z^N - Y^N = X^N$, где N достаточно быть простым числом или N = 4, Z, Y, X попарно просты, X и N взаимно просты, и X ≡ QP задан взаимно простыми P > Q, _ определяет - на базе двух известных тождеств - необходимое условие существования «троек Ферма», выполнимое только при N = 2, что выясняется с помощью начал математического анализа, созданных Пьером Ферма.

* * *