УДК 511.2

В.И.Рахман

‘*Mirabilem sane’* доказательство-1637

(*реконструкция*)

Для X, Y и Z без общего множителя уравнение теоремы решается введением взаимно простых параметров $P > Q$, произведение которых задаёт слагаемое, взаимно простое с N, обозначаемое как X, а Y и Z определены системой двух уравнений для двух неизвестных. При $N>2$ класс чисел всех Y,Z не ясен. Напрашивающаяся замена параметров разделяет искомые переменные, а недопустимость переопределённости задачи даёт аналитическое решение, без труда доказывающее теорему.

‘Последняя теорема Ферма*’* (**ПТФ**) или «ВТФ» :
для любого натурального числа $N > 2$ уравнение

$$X^N + Y^N = Z^N \qquad [1]$$

не имеет натуральных решений X, Y и Z.

Полагаем попарно простыми X, Y, Z - *тройку Ферма* (**ТФ**) натуральных чисел, отвечающих уравнению [1], - оригинальную, а не производную от неё умножением на общий множитель.

Достаточно доказать **ПТФ** для N – простых чисел и $N = 4$ **:** из правоты теоремы при $n = N > 2$ следует справедливость её и для $n = Nm > N$, т.к. в $(X^m)^N + (Y^m)^N = (Z^m)^N$ все три числа X^m, Y^m, Z^m не могут быть целыми одновременно. Поэтому можно принять за X взаимно простое с таким N одно из слагаемых в [1] и положить $X \equiv PQ$, где взаимно простые $P > Q$ сыграют роль параметров системы двух уравнений с двумя неизвестными :

$$\mathbf{S}(Y, Z) = P^N \quad \text{и} \quad \mathbf{R}(Y, Z) = Q^N, \text{ -} \qquad [2]$$

соответствующей [1] в форме :

$$Z^N - Y^N = X^N, \text{ -} \qquad [3]$$

и тождеству :

$$Z^N - Y^N \equiv (Z - Y)(Z^{N-1} + YZ^{N-2} + \ldots + Y^{N-1}), \text{ -}$$

с введёнными обозначениями **:**

$$\mathbf{R} = Z - Y \quad \text{и} \quad \mathbf{S} = Z^{N-1} + YZ^{N-2} + \ldots + Y^{N-1}, - \qquad [4]$$

где **S** и **R** взаимно просты, т.к. $\mathbf{SR} = X^N$, и по теореме Безу **:**

$$\mathbf{S} = Z^{N-1} + YZ^{N-2} + \ldots + Y^{N-1} = (Z - Y)\,(Z^{N-2} + \ldots) + NY^{N-1}.$$

При $N = 2$, т.е. для вычисления по [3] *троек Пифагора* (**ТП**), имеем в [2] : $\mathbf{S} = Z + Y = P^2$ и $\mathbf{R} = Z - Y = Q^2$, -
старинный рецепт получения всех оригинальных («примитивных») **ТП** :

$$X = PQ\,, \quad Y = (P^2 - Q^2)/2, \quad Z = (P^2 + Q^2)/2, - \qquad [5]$$

для всех пар нечётных взаимно простых $P > Q \geq 1$.

Система уравнений [2] отвечает всем без исключения тройкам взаимно простых X, Y, Z, однако, при $N > 2$ этим путём не удаётся элементарно выяснить класс чисел всех получаемых корней Z и Y.

Простая эквивалентная замена параметров P и Q :

$$P^N = \mathbf{b} + \mathbf{c}, \quad Q^N = \mathbf{b} - \mathbf{c}, \quad \mathbf{b} = (P^N + Q^N)/2, \quad \mathbf{c} = (P^N - Q^N)/2, \ -$$

позволяет разделить искомые переменные уравнения [3] **ПТФ** :

$$X^N = P^N Q^N = \mathbf{b}^2 - \mathbf{c}^2 = Z^N - Y^N, -$$

где необходимо, вообще говоря, $Z^N = \mathbf{b}^2 + \mathbf{D}$ и $Y^N = \mathbf{c}^2 + \mathbf{D}$, т.е. ввести ещё один параметр **D** исходного уравнения. Но величины всех корней Z и Y уже определены двумя параметрами P и Q, как и эквивалентной парой **b** и **c**, поэтому **D** не может влиять на значения Z и Y, а для этого должен быть тождественным нулём (как в [5]), так что :

$$Z^N = \mathbf{b}^2 \quad \text{и} \quad Y^N = \mathbf{c}^2, \quad \text{т.е.}$$

$$Z^N = [(P^N + Q^N)/2]^2 \quad \text{и} \quad Y^N = [(P^N - Q^N)/2]^2, - \qquad [6]$$

строгое аналитическое решение уравнения [1]~[3], когда $X \equiv PQ$, - для любых возможно существующих оригинальных троек Ферма.

При этом $Z^{N/2}$ и $Y^{N/2}$ по [6] - натуральные числа :

$$Z^{N/2} = (P^N + Q^N)/2 \quad \text{и} \quad Y^{N/2} = (P^N - Q^N)/2, -$$

а их разность :

$$Z^{N/2} - Y^{N/2} = Q^N\ , -$$

только при $N = 2$ отвечает необходимому $Z - Y = Q^N$ в системе уравнений [2], исчерпывающе определяющей все решения уравнения [1], имеющие шанс оказаться тройкой Ферма по условию теоремы.

Т.о., **ПТФ** справедлива.