Министерство образования Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики

ПЛАНИРОВАНИЕ И ОРГАНИЗАЦИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

Программа, контрольные задания и методические указания

для студентов-заочников специальности 13.02.00

Минск 2000

УДК 519.242

Рассмотрены и рекомендованы к изданию редакционно-издательским советом университета

Составитель ассистент Блинова Е.И.
Научный редактор профессор Марченко В.М.
Рецензент доцент кафедры полиграфии
БГТУ Гончаров В.Н.

По тематическому плану изданий учебно-методической литературы университета на 2000 год.

Для студентов-заочников специальности 13.02.00 "Физико-химические методы и приборы контроля качества продукции".

1 Введение. Цели и задачи планирования эксперимента

Целью любого эксперимента является получение информации. Интерес к науке об эксперименте связан с широкими масштабами экспериментальных исследований и значительным экономическим эффектом от оптимальной организации эксперимента. Многогранность изучаемых явлений, сложность и высокая стоимость оборудования, острая нехватка времени — все это вынуждает исследователя продумывать план предстоящих экспериментов. Целью планирования эксперимента является организация экспериментальных исследований, позволяющая получить **максимум информации при наименьшем количестве опытов.**

Планирование эксперимента — это совокупность приемов, позволяющих исследователю разумно выбрать план эксперимента, т. е. число и условия проведения опытов, необходимых для решения поставленной задачи в условиях неполного знания механизма исследуемого явления.

Основными частями математической теории эксперимента являются:

1) статистический анализ;

2) построение и анализ эмпирических моделей;

3) планирование эксперимента при поиске оптимальных условий.

Что нового внесла математическая теория эксперимента в практическую деятельность инженера-исследователя?

Во-первых, использование современных экспериментально-статистических методов позволяет свести к минимуму интуитивный, "волевой", подход к организации (планированию) эксперимента, заменить его научно обоснованной программой проведения эксперимента, причем субъективные оценки уступают место достаточно надежным статистическим оценкам результатов эксперимента на всех этапах исследования.

Во-вторых, основная цель большинства экспериментальных исследований, состоящая в нахождении оптимальных условий проведения процесса, достигается с помощью минимально возможного числа опытов при минимальных затратах времени и средств.

В-третьих, планирование эксперимента обеспечивает системный подход к изучению сложных явлений.

В-четвертых, даже при неполном знании внутренних закономерностей изучаемого явления можно получить математическую модель, отражающую наиболее существенные факторы.

Данные методические указания содержат программу курса "Планирование и организация эксперимента", краткие теоретические сведения и указания на литературу, контрольные вопросы по всем разделам, задания к контрольной работе и указания по их выполнению.

2 Программа курса "Планирование и организация эксперимента"

1. Основные понятия планирования эксперимента. Однофакторный и многофакторный эксперимент. Активный и пассивный эксперимент. План эксперимента. Критерии оптимальности планов эксперимента.

2. Элементы многомерного регрессионного анализа. Метод наименьших квадратов.

3. Статистический анализ эмпирического уравнения регрессии. Воспроизводимость эксперимента. Расчет дисперсии воспроизводимости. Проверка значимости коэффициентов и адекватности эмпирического уравнения регрессии.

4. Полный факторный эксперимент (ПФЭ) 2^k. Свойства матрицы планирования ПФЭ 2^k. Расчет коэффициентов линейного уравнения и уравнения регрессии со взаимодействиями по результатам ПФЭ 2^k.

5. Дробный факторный эксперимент. Сокращение числа опытов с помощью дробных реплик.

6. Экспериментальные методы поиска оптимальных условий. Метод крутого восхождения (метод Бокса-Уилсона).

7. Планы 2-го порядка. Ортогональный центрально-композиционный план.

3 Краткие теоретические сведения

1. Основные понятия планирования эксперимента. Литература: [1], с. 14–31, 47–68, [2], с. 4–7, [4], с. 5–21, [5], с. 34–40.

Под **экспериментом** понимают совокупность опытов, проводимых в определенном порядке. **Опыт** — это воспроизведение исследуемого явления при определенных заданных условиях.

План эксперимента — это выбор числа, условий и порядка проведения опытов.

Планирование эксперимента — выбор плана эксперимента, удовлетворяющего заданным требованиям.

В большинстве исследований экспериментатор заранее планирует проведение серии опытов, определяет методику и условия их проведения. Такой эксперимент, при котором исследователь активно управляет условиями проведения опытов, называется **активным.** В некоторых случаях проводятся эксперименты, при которых исследователь не может управлять условиями, а имеет возможность лишь наблюдать за ходом процесса. Такой эксперимент называется **пассивным.** К пассивному эксперименту относится, например, сбор исходного статистического материала в режиме нормальной эксплуатации на промышленном объекте. Обработка опытных данных проводится статистическими методами. Методы математической статистики позволяют в случае пассивного эксперимента извлечь максимум информации из имеющихся экспериментальных данных — оптимизировать процедуру обработки и анализа результатов эксперимента. Используя активный эксперимент (планирование эксперимента), можно достичь существенно большего — оптимизировать и стадию постановки эксперимента.

Различают однофакторный и многофакторный эксперименты. При **однофакторном** эксперименте влияние факторов подвергается исследованию поочередно: сначала варьируется один из них, а остальные фиксируются; потом аналогичным образом варьируется только второй фактор, затем третий и т. д. В этом случае для получения полной информации о данном явлении необходимо проводить огромное количество опытов. При **многофакторном** эксперименте значения всех факторов изменяют от опыта к опыту по определенной программе.

При планировании эксперимент активный и, как правило, многофакторный. Планирование эксперимента используется при исследовании сложных процессов, зависящих от большого числа факторов.

Математической моделью объекта служит функция отклика

$$y = f\left(X_1, X_2, \ldots, X_k\right),$$

которая выражает зависимость выходного параметра y от независимых переменных $X_1, X_2, \ldots, X_k$, которые можно варьировать при постановке эксперимента. Независимые переменные $X_1, X_2, \ldots, X_k$ называются **факторами**, а выходной параметр y — **откликом** или **параметром оптимизации**. Например, при разработке некоторого химико-технологического процесса изучается выход реакции и качество продукта в зависимости от температуры, давления, времени протекания реакции, соотношения реагентов. При каких условиях достигается наибольший выход реакции? Здесь параметр оптимизации y — выход реакции; факторы: X_1 — температура, X_2 — давление, X_3 — время протекания реакции, $X_4, \ldots$ — концентрации основных реагирующих веществ.

Как правило, зависимость отклика от рассматриваемых факторов очень сложна, так что аналитическое выражение функции отклика неизвестно. Наиболее часто функцию отклика представляют в виде полинома

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^{k} \beta_i X_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{k} \beta_{ij} X_i X_j + \sum_{i=1}^{k} \beta_{ii} X_i^2 + \ldots$$

Это представление есть не что иное, как разложение функции отклика в ряд Тейлора:

$$\beta_i = \frac{\partial f}{\partial X_i}, \quad \beta_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial X_i \partial X_j}, \quad \beta_{ii} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial X_i^2}, \quad \ldots$$

Поскольку в реальном процессе всегда существуют неуправляемые и неконтролируемые параметры, изменение величины y носит случайный характер, поэтому при обработке экспериментальных данных используют методы математической статистики. По данным эксперимента получают **выборочные коэффициенты** регрессии $b_0, b_i, b_{ij}, b_{ii}, \ldots,$ являющиеся оценками теоретических коэффициентов $\beta_0, \beta_i, \beta_{ij}, \beta_{ii}, \ldots$ Эмпирическое уравнение регрессии, т. е. полученное на основании экспериментальных данных, запишется следующим образом:

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i X_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{k} b_{ij} X_i X_j + \sum_{i=1}^{k} b_{ii} X_i^2 + \ldots \qquad (1)$$

Коэффициент b_0 называется оценкой свободного члена уравнения регрессии; коэффициенты b_i — оценками линейных эффектов; b_{ii} — оценками квадратичных эффектов; b_{ij} — оценками эффектов взаимодействия. Коэффициенты эмпирического уравнения регрессии определяются по методу наименьших квадратов.

2. Элементы многомерного регрессионного анализа. Метод наименьших квадратов. Литература: [1], с. 141–149, 156–166, [2], с. 125–128, 142–148, [3], с. 46–49, [4], с. 104–114, [5], с. 51–56, 58–62 [6], с. 35–38.

Цель регрессионного анализа — получение по экспериментальным данным регрессионной модели (1) объекта исследования.

Пусть имеется N наблюдений над откликом y и факторами X_1, $X_2, \ldots, X_k$. Требуется определить коэффициенты эмпирического уравнения регрессии

$$\widehat{y} = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + \ldots + b_k X_k. \tag{2}$$

Матрица значений независимых переменных

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_{01} & X_{11} & X_{21} & \ldots & X_{k1} \\ X_{02} & X_{12} & X_{22} & \ldots & X_{k2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ X_{0N} & X_{1N} & X_{2N} & \ldots & X_{kN} \end{pmatrix}$$

называется в планировании эксперимента **матрицей плана** или **матрицей планирования**. Она содержит наблюдаемые значения независимых факторов X_{ji}, где индекс j указывает номер фактора, i — номер опыта. Элементы первого столбца $X_{0i} \equiv 1$, фиктивный фактор X_0 соответствует свободному члену уравнения регрессии (2) и введен для однообразия обозначений. Столбец наблюдений $\mathbf{Y}$ содержит наблюдаемые значения отклика, символом $\mathbf{B}$ обозначим вектор искомых параметров:

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}.$$

Сущность метода наименьших квадратов (МНК) заключается в том, чтобы по результатам эксперимента $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ найти такие значения параметров $b_0, b_1, \ldots, b_k$, при которых достигается наименьшее значение суммы квадратов отклонений наблюдаемых значений отклика от предсказываемых по уравнению регрессии (2):

$$S = \sum_{i=1}^{N} (y_i - \widehat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{N} (y_i - (b_0 + b_1 X_{1i} + \ldots + b_k X_{ki}))^2 \to \min_{b_0, b_1, \ldots, b_k}$$

Необходимым условием экстремума функции нескольких переменных является равенство нулю частных производных:

$$\frac{\partial S}{\partial b_0} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b_1} = 0, \ \ldots, \ \frac{\partial S}{\partial b_k} = 0.$$

Значения параметров $b_0, b_1, \ldots, b_k$ находят из системы

$$\begin{cases} b_0 \sum\limits_{i=1}^{N} X_{0i}^2 + b_1 \sum\limits_{i=1}^{N} X_{0i}X_{1i} + \ldots + b_k \sum\limits_{i=1}^{N} X_{0i}X_{ki} = \sum\limits_{i=1}^{N} X_{0i}y_i, \\ b_0 \sum\limits_{i=1}^{N} X_{0i}X_{1i} + b_1 \sum\limits_{i=1}^{N} X_{1i}^2 + \ldots + b_k \sum\limits_{i=1}^{N} X_{1i}X_{ki} = \sum\limits_{i=1}^{N} X_{1i}y_i, \\ \ldots \\ b_0 \sum\limits_{i=1}^{N} X_{0i}X_{ki} + b_1 \sum\limits_{i=1}^{N} X_{1i}X_{ki} + \ldots + b_k \sum\limits_{i=1}^{N} X_{ki}^2 = \sum\limits_{i=1}^{N} X_{ki}y_i, \end{cases} \tag{3}$$

которая называется **системой нормальных уравнений** метода наименьших квадратов. В матричном виде система (3) запишется как $\mathbf{X}^T\mathbf{X}\mathbf{B} = \mathbf{X}^T\mathbf{Y}$, откуда $\mathbf{B} = \left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{Y}$. Матрица $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ называется **информационной матрицей плана** и играет фундаментальную роль в планировании эксперимента, т. к. она не зависит от значений y, но от ее свойств существенно зависят оценки коэффициентов b_j и их статистические характеристики. Выбирая специальным образом план эксперимента $\mathbf{X}$, можно получить хорошие статистические оценки коэффициентов регрессии независимо от наблюдаемых значений y.

3. Статистический анализ эмпирического уравнения регрессии. Воспроизводимость эксперимента. Расчет дисперсии воспроизводимости. Проверка значимости коэффициентов и адекватности эмпирического уравнения регрессии. Литература: [1], с. 122–133, 149–155, 167–184, [2], с. 37–40, 50–54, 131–134, 172–173, [3], с. 11–14, 56–63, [4], с. 114–116, 121–127, 177-178, [5], с. 20–22, 63–70, [6], с. 42–46.

Одним из условий применимости регрессионного анализа является **воспроизводимость эксперимента**, т. е. однородность случайных ошибок результатов наблюдений в различных опытах. Количественной мерой ошибок служит **выборочная дисперсия**. Оценки дисперсий параметра y находят по формуле

$$s^2\{y_i\} = \frac{1}{m-1}\sum_{u=1}^{m}\left(y_{iu} - \overline{y_i}\right)^2, \qquad \overline{y_i} = \frac{1}{m}\sum_{u=1}^{m} y_{iu},$$

где i — номер опыта, m — число повторений i-го опыта, $y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{im}$ — наблюдаемые значения отклика в i-м опыте, $\overline{y_i}$ — среднее значение отклика в i-м опыте. Число степеней свободы $f_i = m - 1$.

Для проверки воспроизводимости эксперимента в случае равномерного дублирования опытов (т. е. когда все опыты повторяются одинаковое число раз) используется критерий Кохрена, который основан на отношении максимальной дисперсии к сумме всех сравниваемых дисперсий:

$$G_{\text{набл}} = \frac{s^2_{\max}\{y_i\}}{\sum\limits_{i=1}^{N} s^2\{y_i\}},$$

где N — число различных опытов. Если вычисленное по данным эксперимента значение критерия $G_{\text{набл}}$ окажется меньше критического значения $G_{\text{табл}} = G_{\alpha;\nu_1;\nu_2}$, найденного по таблице (см. приложение) для $\nu_1 = m - 1$ и $\nu_2 = N$ и выбранного уровня значимости α, то гипотеза о воспроизводимости эксперимента принимается.

В случае неравномерного дублирования опытов воспроизводимость эксперимента проверяют по критерию Бартлетта.

Для проверки воспроизводимости эксперимента используют также критерий Фишера, предназначенный для сравнения двух дисперсий. В этом случае проверяется однородность максимальной и минимальной из дисперсий $s^2\{y_i\}$: если

$$F_{\text{набл}} = \frac{s^2_{\max}\{y_i\}}{s^2_{\min}\{y_i\}} < F_{\text{табл}} = F_{\alpha;f_1;f_2},$$

где f_1 и f_2 — число степеней свободы дисперсий $s^2_{\max}\{y_i\}$ и $s^2_{\min}\{y_i\}$ соответственно, $F_{\text{табл}}$ определяется по таблице (см. приложение) для заданного уровня значимости α и соответствующих степеней свободы f_1 и f_2, то все дисперсии $s^2\{y_i\}$ считаются однородными.

Если проверка воспроизводимости эксперимента дала отрицательный результат, то, вообще говоря, использование регрессионного анализа нецелесообразно. В этом случае можно попытаться увеличить число m повторений опытов для достижения большей точности эксперимента или поставить новый эксперимент с уменьшенными интервалами варьирования факторов.

Дисперсия воспроизводимости является количественной оценкой ошибок эксперимента в целом. При равномерном дублировании опытов она вычисляется как среднее дисперсий отдельных опытов:

$$s^2\{y\} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} s^2\{y_i\}$$

с числом степеней свободы $f_{\text{воспр}} = N(m-1)$.

Оценка значимости коэффициентов регрессии позволяет выявить незначимые коэффициенты регрессионного уравнения, т. е. те, которые можно приравнять к нулю в математической модели. Коэффициент регрессии оказывается незначимым в том случае, если соответствующий ему фактор оказывает пренебрежимо малое влияние на изменение отклика. Проверку значимости коэффициентов регрессии производят с помощью критерия Стьюдента. Для этого вычисляют

$$t_{j,\text{набл}} = \frac{|b_j|}{s_{b_j}}.$$

Дисперсия коэффициента b_j определяется по формуле $s^2_{b_j} = C_{jj}s^2\{y\}$, где C_{jj} — соответствующий диагональный элемент матрицы $\left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}$. Вычисленное значение $t_{j,\text{набл}}$ сравнивают с табличным значением $t_{\text{табл}} = t_{\alpha;f_{\text{воспр}}}$ (см. таблицу в приложении) при заданном уровне значимости α и числе степеней свободы $f_{\text{воспр}} = N(m-1)$. Если $t_{j,\text{набл}} > t_{\text{табл}}$, считают, что коэффициент b_j значим, т. е. j-й фактор оказывает существенное влияние на отклик.

Статистическая незначимость оценки b_j коэффициента регрессии может быть обусловлена следующими причинами: а) данный j-й фактор не оказывает влияния на отклик и может быть исключен из программы исследования; б) влияние j-го фактора в ходе данного эксперимента не проявилось на фоне случайных помех (например, из-за того, что был выбран слишком малый интервал варьирования данного фактора); в) значение данного фактора в центре плана соответствует оптимальному. Если есть основания полагать, что данный j-й фактор в действительности оказывает влияние на отклик, то следует поставить новый эксперимент, увеличив интервал варьирования j-го фактора.

Незначимые коэффициенты могут быть исключены из уравнения регрессии. Однако в общем случае коэффициенты регрессии зависят от наблюдаемых значений всех факторов, поэтому исключение некоторых факторов из математической модели приводит к пересчету всех коэффициентов b_j. Свойством независимости оценок коэффициентов друг от друга обладают эксперименты с ортогональной матрицей плана $\mathbf{X}$, например, полный и дробный факторный эксперимент.

Проверка адекватности модели дает возможность ответить на вопрос, соответствует ли полученная модель экспериментальным данным. Для этого нужно оценить отклонение предсказанной по полученному уравнению регрессии величины отклика $\widehat{y_i}$ от результатов наблюдений $\overline{y_i}$ в одних и тех же условиях. Рассеяние результатов наблюдений вблизи уравнения регрессии можно охарактеризовать с помощью дисперсии адекватности

$$s^2_{\text{ад}} = \frac{m}{N-d} \sum_{i=1}^{N} \left(\widehat{y_i} - \overline{y_i}\right)^2,$$

где d — число членов уравнения регрессии, m — число повторений каждого опыта в случае равномерного дублирования. Число степеней свободы дисперсии адекватности $f_{\text{ад}} = N - d$. Проверка адекватности модели возможна только при условии $N > d$. Проверка гипотезы об адекватности уравнения регрессии состоит в проверке однородности дисперсии адекватности и дисперсии воспроизводимости и производится по критерию Фишера. Если

$$F_{\text{набл}} = \frac{s^2_{\text{ад}}}{s^2\{y\}} < F_{\text{табл}} = F_{\alpha; f_{\text{ад}}; f_{\text{воспр}}},$$

где $F_{\text{табл}}$ находится по таблице (см. приложение) для заданного уровня значимости α и соответствующих степеней свободы $f_{\text{ад}}$ и $f_{\text{воспр}}$, то гипотезу об адекватности не отвергают.

Если гипотеза об адекватности модели отклоняется, принимают одно из следующих решений: 1) переход к более сложной модели (например, от линейной модели к модели с квадратичными эффектами); 2) уменьшение интервалов варьирования факторов ΔX_i.

4. Полный факторный эксперимент. Литература: [1], с. 69–92, [2], с. 159–166, [3], с. 49–56, [4], с. 141–147, [5], с. 79–92, [6], с. 38–46.

Для нахождения оценок коэффициентов линейного уравнения регрессии (2) каждый из факторов должен варьироваться по крайней мере на двух уровнях. Эксперимент, в котором реализуются все возможные комбинации k факторов на двух уровнях, называется **полным факторным экспериментом** (ПФЭ) 2^k. Число различных опытов в ПФЭ $N = 2^k$.

Для упрощения планирования и расчетов проводят преобразование независимых факторов X_i в безразмерные, кодированные x_i по формуле

$$x_i = \frac{X_i - X_i^0}{\Delta X_i},$$

где X_i^0 — основной (базовый) уровень, ΔX_i — шаг варьирования фактора X_i. Если в эксперименте фактор X_i принимает только два значения $X_i^{\max}$ и $X_i^{\min}$, то

$$X_i^0 = \frac{X_i^{\max} + X_i^{\min}}{2}, \qquad \Delta X_i = \frac{X_i^{\max} - X_i^{\min}}{2}.$$

В кодированных переменных верхнему $X_i^{\max}$ и нижнему $X_i^{\min}$ уровням фактора соответствуют значения $x_i = +1$ и $x_i = -1$.

Матрица плана для ПФЭ 2^3 в кодированных переменных имеет вид

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} +1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 \end{pmatrix}$$

Свойство ортогональности матрицы плана ПФЭ позволяет вычислить коэффициенты эмпирического уравнения регрессии по очень простой формуле

$$b_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_{ji} \overline{y_i}. \tag{4}$$

Оценки эффектов взаимодействия b_{jt} определяются аналогично оценкам линейных эффектов по формуле

$$b_{jt} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_{ji} x_{ti} \overline{y_i}.$$

ПФЭ обладает важным свойством независимости оценок коэффициентов уравнения регрессии. Исключение незначимых коэффициентов из модели не влечет пересчета оставшихся коэффициентов.

5. Дробный факторный эксперимент (ДФЭ). Литература: [1], с. 93–112, [2], с. 166–173, [3], с. 70–74, [4], с. 147–161, [5], с. 92–99, [6], с. 46–49.

Дробным факторным называется эксперимент, реализующий часть (дробную реплику) полного факторного эксперимента. ДФЭ применяется с целью сокращения числа опытов при решении следующих задач: а) локальное описание зависимости отклика от факторов линейным уравнением; б) описание процессов, в которых заведомо не могут иметь место хотя бы некоторые взаимодействия факторов.

Например, в случае трех факторов для получения линейного уравнения

$$\widehat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3$$

в принципе достаточно четырех опытов. Рассмотрим ПФЭ 2^2 для факторов x_1 и x_2, а фактор x_3 будем изменять в соответствии с элементами столбца $x_1 x_2$, т. е. $x_3 = x_1 x_2$. Полученная матрица плана представляет собой половину матрицы плана ПФЭ 2^3. Соответствующий план называется полурепликой от ПФЭ 2^3 и обозначается ДФЭ 2^{3-1}, где 3 — число факторов, 1 — число линейных эффектов, приравненных к эффектам взаимодействия. Матрица плана такого эксперимента сохраняет все свойства матрицы плана ПФЭ 2^k, поэтому коэффициенты уравнения регрессии вычисляются независимо друг от друга по формулам (4).

	x_0	x_1	x_2	$x_3 = x_1 x_2$
Опыт 1	+	−	−	+
Опыт 2	+	+	−	−
Опыт 3	+	−	+	−
Опыт 4	+	+	+	+

Соотношение $x_3 = x_1 x_2$ называется генерирующим соотношением (ГС) плана ДФЭ 2^{3-1}. **Генерирующим** называется соотношение, привязывающее дополнительный фактор (в данном случае — x_3) к определенному взаимодействию основных факторов. ГС служит для построения ДФЭ. Умножив ГС $x_3 = x_1 x_2$ на x_3, получим $x_3^2 = x_1 x_2 x_3$, т. е. $1 = x_1 x_2 x_3$ — **определяющий контраст** — соотношение, задающее элементы первого столбца матрицы плана. **Обобщенный определяющий контраст** — это совокупность всех определяющих контрастов данного ДФЭ.

В ДФЭ 2^{3-1} с ГС $x_3 = x_1 x_2$ фактор x_3 варьируется одинаково с парным взаимодействием $x_1 x_2$, поэтому нельзя отделить влияние фактора x_3 от влияния взаимодействия $x_1 x_2$, говорят, что коэффициент b_3 дает совместную, или смешанную, оценку двух истинных коэффициентов регрессии β_3 и $\beta_{12} : b_3 \to \beta_3 + \beta_{12}$. Последовательно перемножив независимые факторы на определяющий контраст, получим соотношения

$$1 = x_1 x_2 x_3, \quad x_1 = x_2 x_3, \quad x_2 = x_1 x_3, \quad x_3 = x_1 x_2,$$

определяющие систему совместных оценок данного эксперимента.

6. Экспериментальные методы поиска оптимальных условий. Метод крутого восхождения (метод Бокса-Уилсона). Литература: [1], с. 207–230, [2], с. 174–177, [3], с. 63–66, [4], с. 241–245, 256–258, 264–267, [5], с. 150, 156–163, [6], с. 76–78, 83–87.

Одним из важнейших практических приложений теории эксперимента является возможность прямого получения сочетания факторов, обеспечивающих оптимальное значение функции отклика.

Метод крутого восхождения основан на свойстве градиента функции нескольких переменных: градиент — это вектор, направленный в сторону наискорейшего возрастания функции. Компоненты градиента равны частным производным функции отклика:

$$\overrightarrow{\mathrm{grad} y} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial X_1}; \ldots ; \frac{\partial f}{\partial X_k} \right\}.$$

Метод Бокса-Уилсона для оценки компонент градиента функции отклика использует ПФЭ или ДФЭ. Для осуществления движения по градиенту значения факторов необходимо изменять пропорционально величинам $b_j \Delta X_j$ — произведению коэффициентов линейного уравнения регрессии, полученного по результатам ПФЭ (ДФЭ), на интервал варьирования соответствующего фактора. Движение в направлении градиента осуществляется до достижения частного экстремума функции отклика в направлении градиента. Затем в окрестности полученной точки вновь проводится ПФЭ (ДФЭ) для оценки компонент градиента и выбора направления дальнейшего движения к экстремуму.

7. Ортогональные центрально-композиционные планы 2-го порядка. Литература: [1], с. 262–264, [2], с. 177–188, [3], с. 99–104, 107-110, [4], с. 184–195, [6], с. 99–107.

Планы 2-го порядка — планы, предназначенные для получения уравнения регрессии в виде полинома 2-го порядка — применяются в случае, если при проверке адекватности линейной модели получен негативный результат. Это означает, что рассматриваемое явление не может быть с удовлетворительной точностью описано полиномом 1-го порядка. Уравнение регрессии 2-го порядка имеет вид

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i X_i + \sum_{i,j=1}^{k} b_{ij} X_i X_j + \sum_{i=1}^{k} b_{ii} X_i^2.$$

Для оценки всех коэффициентов такой модели необходимо иметь план, в котором каждый фактор варьировался бы не менее чем на трех уровнях. При большом числе факторов необходимое число опытов становится очень большим. Для уменьшения числа опытов используется идея композиционного планирования. Композиционный план 2-го порядка получается путем добавления дополнительных опытов к плану 1-го порядка (т. е. к плану, предназначенному для построения линейной регрессионной модели).

4 Контрольные вопросы

1. Что такое опыт, эксперимент?
2. Что такое план эксперимента?
3. В чем различие активного и пассивного эксперимента?
4. В чем различие однофакторного и многофакторного эксперимента?
5. В чем суть метода наименьших квадратов?
6. Вывести систему нормальных уравнений для определения по МНК коэффициентов эмпирического уравнения регрессии $y = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2$.
7. Записать систему нормальных уравнений для определения по МНК коэффициентов эмпирического уравнения регрессии $y = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3$.
8. Записать систему нормальных уравнений для определения по МНК коэффициентов эмпирического уравнения регрессии $y = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_{12} X_1 X_2$.
9. Что такое информационная матрица?
10. Что такое воспроизводимость эксперимента и как она проверяется?
11. При каких условиях требования воспроизводимости эксперимента не соблюдаются и как следует поступать в этом случае?
12. В каких случаях для проверки воспроизводимости эксперимента используется критерий Кохрена?
13. Как применяется критерий Фишера для проверки воспроизводимости эксперимента?

14. Как рассчитать дисперсию воспроизводимости: а) по отдельной серии опытов, результаты которых не используются для получения регрессионной модели; б) при равномерном дублировании опытов?

15. Что такое значимость коэффициентов регрессии и как она проверяется?

16. При каких условиях оценки коэффициентов регрессии незначимы и как эти условия устранить?

17. Что такое адекватность модели и как она проверяется?

18. При каких условиях математическая модель является неадекватной и как поступить в этом случае?

19. Что называется полным факторным экспериментом (ПФЭ)?

20. Как выбираются основные (базовые) уровни и интервалы варьирования факторов, изменяемых в эксперименте на двух уровнях? Запишите формулы перехода от натуральных значений факторов к кодированным.

21. Как составляется матрица планирования ПФЭ 2^k? Какими свойствами она обладает?

22. Запишите формулы для расчета коэффициентов эмпирического уравнения регрессии по результатам ПФЭ 2^k.

23. Выведите формулы для расчета коэффициентов эмпирического уравнения регрессии по результатам ПФЭ 2^2.

24. Что называется дробным факторным экспериментом? Какие принципы лежат в основе построения ДФЭ?

25. Что такое генерирующее соотношение? Что такое определяющий контраст и обобщенный определяющий контраст?

26. Как найти систему совместных оценок коэффициентов в ДФЭ?

27. Чем отличается ДФЭ от ПФЭ?

28. В каких случаях возможно использование ДФЭ?

29. Какими свойствами обладает ДФЭ?

30. Составьте план наиболее экономного ДФЭ при данном списке существенных переменных; запишите матрицу планирования; выпишите систему смешивания оценок: а) $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_1x_2, x_2x_3, x_2x_4$; б) $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4$; в) $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_1x_2$; г) $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_1x_2, x_2x_3$; д) $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_1x_2, x_4x_5$.

31. Как формулируется задача поиска оптимальных условий?

32. В чем заключается идея и процедура метода крутого восхождения?

33. Как выбирается направление движения в методе крутого восхождения?

34. Что служит критерием достижения экстремума в методе крутого восхождения?

35. Что такое план 2-го порядка?

36. В чем заключается свойство композиционности плана?

37. Когда и для чего используется центрально-композиционный план?

38. В чем отличие центрально-композиционного плана от ПФЭ и ДФЭ?

39. Какие принципы лежат в основе построения ортогонального центрально-композиционного плана?

40. Как достигается ортогональность матрицы планирования в ортогональном центрально-композиционном плане?

41. Какие преимущества дают исследователю свойства ортогонального центрально-композиционного плана?

42. Как переводится уравнение для нормированных величин в уравнение для реальных физических величин?

43. Как оценить координаты экстремума с помощью полученного уравнения регрессии 2-го порядка?

44. Что такое ротатабельный центрально-композиционный план?

5 Задания к контрольной работе

Контрольная работа состоит из теоретической и расчетной частей. В конце работы следует указать использованную литературу. Номер варианта совпадает с последней цифрой учебного шифра (номера зачетной книжки) студента. Если номер зачетной книжки оканчивается цифрой 0, студент выполняет вариант 10.

Теоретическая часть

Вариант 1. Вопросы 1, 11, 25.
Вариант 2. Вопросы 2, 18, 20.
Вариант 3. Вопросы 3, 16, 32.
Вариант 4. Вопросы 4, 15, 21.
Вариант 5. Вопросы 5, 10, 24.
Вариант 6. Вопросы 7, 12, 26.
Вариант 7. Вопросы 8, 18, 28.
Вариант 8. Вопросы 6, 10, 29.
Вариант 9. Вопросы 3, 13, 22.
Вариант 10. Вопросы 14, 18, 27.

Расчетные задания

Задание 1. Построение математической модели зависимости случайной величины y от трех факторов по результатам ПФЭ 2^3.

Требуется:

1. Проверить гипотезу о воспроизводимости эксперимента по критерию Кохрена, рассчитать дисперсию воспроизводимости.

2. Вычислить коэффициенты модели с парными взаимодействиями.

З а м е ч а н и е. Матрица планирования ПФЭ 2^3 в кодированных переменных имеет стандартный вид (см. таблицу). Знак – означает, что в данном опыте соответствующий фактор фиксируется на нижнем уровне, знак + означает верхний уровень фактора.

	x_1	x_2	x_3
Опыт 1	−	−	−
Опыт 2	+	−	−
Опыт 3	−	+	−
Опыт 4	+	+	−
Опыт 5	−	−	+
Опыт 6	+	−	+
Опыт 7	−	+	+
Опыт 8	+	+	+

3. Провести статистический анализ математической модели: проверить коэффициенты уравнения регрессии на значимость, а полученную после исключения незначимых коэффициентов модель на адекватность. Дать интерпретацию полученного уравнения регрессии.

4. Записать формулы, связывающие кодированные и натуральные значения факторов. С помощью этих формул получить уравнение регрессии в натуральных переменных, выполнить прогнозирование для величины y при фиксированных значениях факторов $X_1 = X_1^*$, $X_2 = X_2^*$, $X_3 = X_3^*$.

Уровень значимости принять $\alpha = 0.05$.

Вариант 1. Исследовалась зависимость внутреннего напряжения гальванического покрытия (y, усл. ед.) от концентрации сахарина (X_1, г/л), плотности тока (X_2, А/дм^3), температуры раствора (X_3, °C).

	X_1	X_2	X_3
Массив основных уровней, X_i^0	0.7	55	45
Шаг варьирования, ΔX_i	0.3	25	15
Фиксированные значения X_i^*	0.8	60	50

	y_1	y_2	y_3
1	3.8	3.9	3.63
2	2.7	2.65	2.78
3	-0.4	-0.43	-0.37
4	-0.9	-1.0	-0.85
5	2.2	2.4	2.2
6	0.8	0.7	0.75
7	2.7	2.5	2.8
8	0.52	0.51	0.55

Вариант 2. Установлено, что важнейшими факторами гидролиза древесной массы, влияющими на предел прочности при изгибе y, МПа, являются: температура (X_1, °C), время (X_2, мин), кислотность (X_3, pH).

	X_1	X_2	X_3
Верхний уровень, X_i^{max}	80	60	4.85
Нижний уровень, X_i^{min}	30	0	4.45
Фиксированные значения X_i^*	10	30	4.45

	y_1	y_2	y_3	y_4
1	41.5	40.5	41	39
2	44	43.5	43.5	44
3	53.5	53	52	52
4	50	49	49	51
5	31	34	34.5	33
6	37	39	36.5	36.5
7	43	46.5	46.5	45
8	52.5	53.5	53.5	53

Вариант 3. Исследовалась зависимость прочности алюминиевого сплава y, Па$\cdot 10^5$, от процентного содержания лития в сплаве (X_1, %), температуры (X_2, °C) и времени старения (X_3).

	X_1	X_2	X_3
Массив основных уровней, X_i^0	1.0	175	4.0
Шаг варьирования, ΔX_i	0.5	25	2.0
Фиксированные значения X_i^*	0.8	200	6.0

	y_1	y_2	y_3
1	26.9	26.8	27
2	23.9	23.2	23.5
3	29.0	29.7	29.5
4	29.4	29.2	28.8
5	28.5	27.8	28
6	25.8	26.4	25.6
7	29.6	30	29.9
8	30	30.9	30.3

Вариант 4. Установлено, что важнейшими факторами гидролиза древесной массы, влияющими на предел прочности при изгибе y, МПа, являются: температура (X_1, °C), время (X_2, мин), кислотность (X_3, pH).

	X_1	X_2	X_3
Верхний уровень, X_i^{max}	60	80	5.2
Нижний уровень, X_i^{min}	20	30	4.5
Фиксированные значения X_i^*	60	45	4.85

	y_1	y_2	y_3
1	41.5	41	39
2	44	43.5	44
3	53.5	52	52
4	50	49	51
5	34	34.5	33
6	37	39	36.5
7	43	46.5	45
8	52.5	53.5	53.5

Вариант 5. Исследовалась зависимость прочности алюминиевого сплава y, Па$\cdot 10^5$, от процентного содержания лития в сплаве (X_1, %), температуры (X_2, °C) и времени старения (X_3).

	X_1	X_2	X_3
Верхний уровень, X_i^{max}	1.5	145	6.0
Нижний уровень, X_i^{min}	1.1	115	2.0
Фиксированные значения X_i^*	1.0	150	5.0

	y_1	y_2	y_3	y_4
1	27.3	26.9	26.8	27
2	23.4	23.9	23.2	23.5
3	29.8	29.0	29.7	29.5
4	28.4	29.4	29.2	28.8
5	27.7	28.5	27.8	28
6	25.8	25.8	26.4	25.6
7	30.5	29.6	30	29.9
8	30.6	30	30.9	30.3

Вариант 6. Исследовалась зависимость прочности бетона y, МПа, от расхода цемента на 1 м^3 (X_1, кг/м^3), количества добавки суперпластификатора (X_2, %), количества добавки ускорителя твердения (X_3, %).

	X_1	X_2	X_3
Верхний уровень, X_i^{max}	350	0.2	2.0
Нижний уровень, X_i^{min}	250	0.1	1.0
Фиксированные значения X_i^*	280	0.15	0.75

	y_1	y_2	y_3
1	30.05	29.95	29.8
2	25.6	26.2	26.8
3	26.6	27.2	27.8
4	22.0	22.8	22.6
5	30.0	30.4	29.8
6	26.8	27.3	27.6
7	26.0	25.8	26.1
8	23.0	23.2	22.8

Вариант 7. Исследовалась зависимость внутреннего напряжения гальванического покрытия (y, усл. ед.) от концентрации сахарина (X_1, г/л), плотности тока (X_2, А/дм^3), температуры раствора (X_3, °С).

	X_1	X_2	X_3
Верхний уровень, X_i^{max}	2.0	55	70
Нижний уровень, X_i^{min}	0.5	15	30
Фиксированные значения X_i^*	1.5	55	50

	y_1	y_2	y_3	y_4
1	3.8	3.9	3.63	3.83
2	2.7	2.65	2.78	2.69
3	-0.4	-0.43	-0.37	-0.4
4	-0.9	-1.0	-0.85	-0.88
5	2.2	2.4	2.2	2.33
6	0.8	0.7	0.75	0.75
7	2.7	2.5	2.8	2.6
8	0.52	0.51	0.55	0.54

Вариант 8. Исследовалась зависимость прочности бетона y, МПа, от расхода цемента на 1 м^3 (X_1, кг/м^3), количества добавки суперпластификатора (X_2, %), количества добавки ускорителя твердения (X_3, %).

	X_1	X_2	X_3
Верхний уровень, X_i^{max}	330	0.2	2.0
Нижний уровень, X_i^{min}	250	0.1	0.5
Фиксированные значения X_i^*	300	0.05	0.5

	y_1	y_2	y_3	y_4
1	30.2	30.05	29.95	29.8
2	25.6	25.0	26.2	26.8
3	26.6	27.2	26.0	27.8
4	22.0	22.8	22.6	22.2
5	30.6	30.0	30.4	29.8
6	26.8	26.3	27.3	27.6
7	26.0	25.8	26.5	26.1
8	23.0	23.2	22.8	23.4

Вариант 9. Установлено, что важнейшими факторами гидролиза древесной массы, влияющими на предел прочности при изгибе y, МПа, являются: температура (X_1, °C), время (X_2, мин), кислотность (X_3, pH).

	X_1	X_2	X_3
Верхний уровень, X_i^{max}	60	80	5.3
Нижний уровень, X_i^{min}	20	30	4.5
Фиксированные значения X_i^*	40	25	4.5

	y_1	y_2	y_3	y_4
1	39	41.5	41	39
2	46	44	43.5	44
3	53.5	53	52	52
4	50	47	49	51
5	31	32	34.5	33
6	37	38	36.5	36.5
7	43	45	46.5	45
8	52.5	55	53.5	53

Вариант 10. Исследовалась зависимость предела прочности алюминиевого сплава (y, кг/мм^3) от содержания примеси (X_1, %), содержания магния (X_2, %), содержания железа (X_3, %).

	X_1	X_2	X_3
Массив основных уровней, X_i^0	6	0.6	3.0
Шаг варьирования, ΔX_i	5	0.5	1.0
Фиксированные значения X_i^*	6	0.6	1.0

	y_1	y_2	y_3
1	4.75	4.71	4.7
2	4.93	4.9	4.88
3	5.7	5.72	5.77
4	5.62	5.63	5.63
5	5.96	5.94	5.93
6	5.77	5.73	5.77
7	6.78	6.73	6.73
8	6.63	6.64	6.67

Вариант А. Изучалось влияние на выход продукта y, %, трех факторов: температуры X_1, изменяющейся в диапазоне 100 – 200°C, давления X_2, $2 - 6 \cdot 10^5$ Па, и времени пребывания X_3, изменяющегося в окрестности 15 мин с интервалом 5 мин.

	X_1	X_2	X_3
Верхний уровень, X_i^{max}	200	6	
Нижний уровень, X_i^{min}	100	2	
Массив основных уровней, X_i^0			15
Шаг варьирования, ΔX_i			5
Фиксированные значения X_i^*	120	4	18

	y_1	y_2
1	2.5	1.5
2	6.6	5.4
3	3.7	4.3
4	9	7
5	8.5	11.5
6	17.6	18.4
7	7.3	8.7
8	13.1	10.9

Задание 2. Минимизация функции двух переменных методом крутого восхождения.

Требуется найти минимум функции

$$y = \frac{a}{X_1} + \frac{bX_1}{X_2} + cX_2$$

при $X_1, X_2 > 0$, проводя эксперименты по методу крутого восхождения. Заданы значения параметров a, b, c и координаты начального приближения X_1^0, X_2^0. Интервалы варьирования факторов в первой серии опытов принять равными $\Delta X_1 = \Delta X_2 = 0.1$. Вычисления производить с точностью до четвертого знака после запятой.

Вариант 1. $a = 14,\ b = 4,\ c = 7,\ X_1^0 = 2,\ X_2^0 = 1.$
Вариант 2. $a = 2,\ b = 5,\ c = 1.5,\ X_1^0 = 1,\ X_2^0 = 2.$
Вариант 3. $a = 4,\ b = 2,\ c = 4,\ X_1^0 = 2,\ X_2^0 = 1.$
Вариант 4. $a = 3,\ b = 1,\ c = 2.5,\ X_1^0 = 1,\ X_2^0 = 1.$
Вариант 5. $a = 16,\ b = 3,\ c = 3,\ X_1^0 = 3,\ X_2^0 = 2.$
Вариант 6. $a = 15,\ b = 4,\ c = 3.5,\ X_1^0 = 2,\ X_2^0 = 1.$
Вариант 7. $a = 16,\ b = 6,\ c = 1.6,\ X_1^0 = 3,\ X_2^0 = 2.$
Вариант 8. $a = 13,\ b = 5,\ c = 11,\ X_1^0 = 2,\ X_2^0 = 1.$
Вариант 9. $a = 6,\ b = 4,\ c = 1,\ X_1^0 = 2,\ X_2^0 = 3.$
Вариант 10. $a = 14,\ b = 3,\ c = 2,\ X_1^0 = 3,\ X_2^0 = 2.$
Вариант А. $a = 6,\ b = 1,\ c = 1,\ X_1^0 = 3,\ X_2^0 = 2.$

6 Методические указания по выполнению расчетных заданий (вариант А)

Задание 1.

1. Проверка воспроизводимости эксперимента есть не что иное, как проверка однородности случайных ошибок результатов наблюдений в различных опытах. Таким образом, задача заключается в проверке однородности дисперсий параметра оптимизации (отклика) в различных опытах.

Оценки дисперсий находят по формуле

$$s^2\{y_i\} = \frac{1}{m-1}\sum_{u=1}^{m}\left(y_{iu} - \overline{y_i}\right)^2, \qquad \overline{y_i} = \frac{1}{m}\sum_{u=1}^{m} y_{iu},$$

где i — номер опыта, m — число повторений i-го опыта, $y_{i1},\ y_{i2},\ \ldots,\ y_{im}$ — наблюдаемые значения отклика в i -м опыте, $\overline{y_i}$ — среднее значение отклика в i -м опыте. Число степеней свободы $f_i = m-1$.

В нашем случае имеются результаты 8 опытов, каждый из которых повторяется 2 раза. Оценка дисперсии параметра y в первом опыте равна

$$s^2\{y_1\} = \frac{1}{2-1}\Big((2.5-2)^2 + (1.5-2)^2\Big) = 0.5, \text{ т. к. } \overline{y_1} = \frac{2.5+1.5}{2} = 2;$$

оценка дисперсии во втором опыте

$$s^2\{y_2\} = \frac{1}{2-1}\left((6.6-6)^2 + (5.4-6)^2\right) = 0.72, \quad \overline{y_2} = \frac{6.6+5.4}{2} = 6$$

и т. д. Результаты вычислений сведены в таблицу. Число степеней свободы для всех дисперсий одинаково и равно $f_i = 1$.

Для проверки воспроизводимости эксперимента используем критерий Кохрена. Имеем

$$G_{\text{набл}} = \frac{4.5}{0.5+0.72+0.18+2+4.5+0.32+0.98+2.42} = \frac{4.5}{11.62} = 0.3873,$$

$$G_{\text{табл}} = G_{0.05;1;8} = 0.6798.$$

Поскольку $G_{\text{набл}} < G_{\text{табл}}$, то гипотеза об однородности дисперсий (воспроизводимости эксперимента) не противоречит результатам эксперимента.

		X_1^0	X_2^0	X_3^0								
Основной уровень		150	4	15								
Интервал варьирования		50	2	5								
Верхний уровень		200	6	20								
Нижний уровень		100	2	10								
Кодовые обозначения	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	y_{i1}	y_{i2}	$\overline{y_i}$	$s^2\{y_i\}$	$\widehat{y_i}$
Опыт 1	+	−	−	−	+	+	+	2.5	1.5	2	0.5	1
Опыт 2	+	+	−	−	−	−	+	6.6	5.4	6	0.72	6
Опыт 3	+	−	+	−	−	+	−	3.7	4.3	4	0.18	4
Опыт 4	+	+	+	−	+	−	−	9	7	8	2	9
Опыт 5	+	−	−	+	+	−	−	8.5	11.5	10	4.5	11
Опыт 6	+	+	−	+	−	+	−	17.6	18.4	18	0.32	16
Опыт 7	+	−	+	+	−	−	+	7.3	8.7	8	0.98	8
Опыт 8	+	+	+	+	+	+	+	13.1	10.9	12	2.42	14
Коэффициенты регрессии	8.5	2.5	−0.5	3.5	−0.5	0.5	−1.5				$\sum = 11.62$	

Дисперсия воспроизводимости при равномерном дублировании опытов вычисляется как среднее дисперсий отдельных опытов, она равна

$$s^2\{y\} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} s^2\{y_i\} = \frac{1}{8}\cdot 11.62 = 1.4525,$$

число степеней свободы дисперсии воспроизводимости $f_{\text{воспр}} = 8$.

2. В случае ПФЭ 2^3 коэффициенты эмпирического уравнения регрессии в кодированных переменных

$$\widehat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3$$

определяются по следующей простой формуле

$$b_j = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{ji}\overline{y_i}.$$

Таким образом,

$$b_0 = \frac{1}{8}\cdot(2+6+4+8+10+18+8+12) = 8.5,$$

$$b_1 = \frac{1}{8}\cdot(-2+6-4+8-10+18-8+12) = 2.5,$$

$$b_2 = \frac{1}{8}\cdot(-2-6+4+8-10-18+8+12) = -0.5,$$

$$b_3 = \frac{1}{8}\cdot(-2-6-4-8+10+18+8+12) = 3.5.$$

Для вычисления коэффициентов b_{12}, b_{13}, b_{23} введем в матрицу планирования дополнительные столбцы x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3. Поскольку кодированные переменные x_i принимают лишь значения $+1$ и -1, все взаимодействия x_ix_j могут принимать только такие же значения. В первом опыте $x_1 = -1$, $x_2 = -1$, поэтому $x_1x_2 = (-1)\cdot(-1) = +1$, во втором опыте $x_1 = +1$, $x_2 = -1$, поэтому $x_1x_2 = (+1)\cdot(-1) = -1$ и т. д. Оценки эффектов взаимодействия определяются аналогично оценкам линейных эффектов по формуле

$$b_{jt} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{ji}x_{ti}\overline{y_i}.$$

Следовательно,

$$b_{12} = \frac{1}{8}\cdot(2-6-4+8+10-18-8+12) = -0.5,$$

$$b_{13} = \frac{1}{8} \cdot (2 - 6 + 4 - 8 - 10 + 18 - 8 + 12) = 0.5,$$

$$b_{23} = \frac{1}{8} \cdot (2 + 6 - 4 - 8 - 10 - 18 + 8 + 12) = -1.5.$$

Получаем уравнение регрессии с учетом эффектов парных взаимодействий

$$\widehat{y} = 8.5 + 2.5x_1 - 0.5x_2 + 3.5x_3 - 0.5x_1x_2 + 0.5x_1x_3 - 1.5x_2x_3.$$

3. Проверку значимости коэффициентов регрессии производят с помощью критерия Стьюдента. В случае ПФЭ дисперсии коэффициентов регрессии равны между собой и вычисляются по формуле

$$s^2_{b_j} = \frac{s^2\{y\}}{Nm} = \frac{1.4525}{8 \cdot 2} = 0.0908, \qquad s_{b_j} = 0.3013.$$

Имеем:

$$t_{1,\text{набл}} = \frac{2.5}{0.3013} = 8.30, \qquad t_{12,\text{набл}} = \frac{0.5}{0.3013} = 1.66,$$

$$t_{2,\text{набл}} = \frac{0.5}{0.3013} = 1.66, \qquad t_{13,\text{набл}} = \frac{0.5}{0.3013} = 1.66,$$

$$t_{3,\text{набл}} = \frac{3.5}{0.3013} = 11.62, \qquad t_{23,\text{набл}} = \frac{1.5}{0.3013} = 4.98,$$

$$t_{\text{табл}} = t_{0.05;8} = 2.31.$$

Поскольку $t_{2,\text{набл}} < t_{\text{табл}}$, коэффициент b_2 признается незначимым и его следует исключить из уравнения регрессии. Из эффектов взаимодействия значимым оказывается только коэффициент b_{23}. Исключая незначимые коэффициенты, получаем уравнение регрессии в виде

$$\widehat{y} = 8.5 + 2.5x_1 + 3.5x_3 - 1.5x_2x_3. \tag{5}$$

Интерпретация результатов: для увеличения выхода продукта нужно увеличивать факторы X_1 (температуру) и X_3 (время), при этом давление (фактор X_2) с увеличением времени следует уменьшать.

Проверим адекватность полученного эмпирического уравнения регрессии экспериментальным данным.

Предсказываемые значения

$$\widehat{y}_1 = 8.5 + 2.5 \cdot (-1) + 3.5 \cdot (-1) - 1.5 \cdot (-1) \cdot (-1) = 1,$$

$$\widehat{y}_2 = 8.5 + 2.5 \cdot (+1) + 3.5 \cdot (-1) - 1.5 \cdot (-1) \cdot (-1) = 6 \quad \text{и т. д.}$$

Дисперсия адекватности

$$s^2_{\text{ад}} = \frac{2}{8-4}((1-2)^2 + (6-6)^2 + (4-4)^2 + (9-8)^2 + (11-10)^2 +$$

$$+(16-18)^2 + (8-8)^2 + (14-12)^2) = 5.5$$

имеет число степеней свободы $f_{\text{ад}} = 4$.

Расчетное значение критерия Фишера $F_{\text{набл}} = \dfrac{5.5}{1.4525} = 3.79$, табличное значение $F_{\text{табл}} = F_{0.05;4;8} = 3.84$. Поскольку $F_{\text{набл}} < F_{\text{табл}}$, полученное уравнение является адекватным и может быть использовано для предсказания выхода продукта в зависимости от заданных значений температуры, давления, времени проведения реакции. Для этого перейдем к натуральным значениям переменных.

4. Верхний уровень фактора X_1 равен $X_1^{\max} = 200°\text{C}$, нижний $X_1^{\min} = 100°\text{C}$. Следовательно, основной (базовый) уровень

$$X_1^0 = \frac{X_1^{\max} + X_1^{\min}}{2} = 150°\text{C},$$

интервал варьирования

$$\Delta X_1 = \frac{X_1^{\max} - X_1^{\min}}{2} = 50°\text{C}.$$

Аналогично для фактора X_2 имеем

$$X_2^{\max} = 6 \cdot 10^5 \text{ Па}, X_2^{\min} = 2 \cdot 10^5 \text{ Па},$$

$$X_2^0 = \frac{6 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^5}{2} = 4{\cdot}10^5 \text{ Па}, \qquad \Delta X_2 = \frac{6 \cdot 10^5 - 2 \cdot 10^5}{2} = 2{\cdot}10^5 \text{ Па}.$$

Для третьего фактора — времени реакции — имеем $X_3^0 = 15$ мин, $\Delta X_3 = 5$ мин. Следовательно, верхний и нижний уровни фактора

$$X_3^{\max} = X_3^0 + \Delta X_3 = 20 \text{ мин}, \quad X_3^{\min} = X_3^0 - \Delta X_3 = 10 \text{ мин}.$$

Переход от натуральных переменных X_1, X_2, X_3 к кодированным x_1, x_2, x_3, которые принимают только значения +1 и –1, задается формулой

$$x_i = \frac{X_i - X_i^0}{\Delta X_i}.$$

Таким образом, подставляя формулы

$$x_1 = \frac{X_1 - 150}{50}, \quad x_2 = \frac{X_2 - 4}{2}, \quad x_3 = \frac{X_3 - 15}{5}$$

в уравнение регрессии (5) в кодированных переменных, после преобразования получим уравнение регрессии в натуральных переменных:

$$\widehat{y} = 8.5 + 2.5 \cdot \frac{X_1 - 150}{50} + 3.5 \cdot \frac{X_3 - 15}{5} - 1.5 \cdot \frac{X_2 - 4}{2} \cdot \frac{X_3 - 15}{5} =$$
$$= -18.5 + 0.05X_1 + 2.25X_2 + 1.3X_3 - 0.15X_2X_3.$$

При $X_1^* = 120°\text{C}$, $X_2^* = 4 \cdot 10^5$ Па, $X_3^* = 18$ мин выход продукта будет

$$\widehat{y} = -18.5 + 0.05 \cdot 120 + 2.25 \cdot 4 + 1.3 \cdot 18 - 0.15 \cdot 4 \cdot 18 = 9.1\,\%.$$

Задание 2. Требуется эмпирическим путем найти минимум функции $y = \dfrac{6}{X_1} + \dfrac{X_1}{X_2} + X_2$ при $X_1, X_2 > 0$. Заданы координаты начального приближения $X_1^0 = 3$, $X_2^0 = 2$ и интервалы варьирования факторов $\Delta X_1 = \Delta X_2 = 0.1$.

I серия опытов. Согласно методу крутого восхождения (МКВ), для оценки градиента функции отклика (т. е. для выбора направления изменения факторов на пути к экстремуму) нужно найти коэффициенты линейного уравнения регрессии в окрестности начальной точки $(X_1^0; X_2^0)$. Для этого используют полный факторный эксперимент 2^2 с центром в точке $(X_1^0; X_2^0)$.

	x_1	x_2
Опыт 1	−	−
Опыт 2	+	−
Опыт 3	−	+
Опыт 4	+	+

Запишем матрицу планирования ПФЭ 2^2 в кодированных переменных (см. таблицу), формулу перехода от натуральных переменных к кодированным:

$$x_i = \frac{X_i - X_i^0}{\Delta X_i}$$

и обратно:

$$X_i = X_i^0 + x_i \cdot \Delta X_i.$$

Таким образом, в первом опыте оба фактора устанавливаются на нижнем уровне: в кодированных переменных $x_1 = -1$, $x_2 = -1$, в натуральных переменных $X_1 = 2.9$, $X_2 = 1.9$. Подставляя значения X_1 и X_2 в минимизируемую функцию, получаем $y = \dfrac{6}{2.9} + \dfrac{2.9}{1.9} + 1.9 =$

$= 5.4953$. Во втором опыте первый фактор фиксируется на верхнем уровне, а второй остается на нижнем: в кодированных переменных $x_1 = +1$, $x_2 = -1$, в натуральных переменных $X_1 = 3.1$, $X_2 = 1.9$, соответствующее значение функции $y = \dfrac{6}{3.1} + \dfrac{3.1}{1.9} + 1.9 = 5.4671$.

Результаты ПФЭ 2^2 занесены в следующую таблицу.

I серия опытов	x_1	X_1	x_2	X_2	y
X_i^0		3		2	
ΔX_i		0.1		0.1	
$X_i^{\max}$		3.1		2.1	
$X_i^{\min}$		2.9		1.9	
ПФЭ	x_1	X_1	x_2	X_2	y
Опыт 1	$-$	2.9	$-$	1.9	5.4953
Опыт 2	$+$	3.1	$-$	1.9	5.4671
Опыт 3	$-$	2.9	$+$	2.1	5.5500
Опыт 4	$+$	3.1	$+$	2.1	5.5117
b_j		$-1.66 \cdot 10^{-2}$		$2.48 \cdot 10^{-2}$	
$b_j \Delta X_j$		$1.66 \cdot 10^{-3}$		$2.48 \cdot 10^{-3}$	
δ_j		0.0669		-0.1	
$\delta_{j,\text{округл}}$		0.07		-0.1	
МКВ		X_1		X_2	
Опыт 1 (5)		3.07		1.9	5.4702
Опыт 2 (6)		3.14		1.8	<u>5.4553</u>
Опыт 3 (7)		3.21		1.7	5.4574
Опыт 4		3.28		1.6	
Опыт 5		3.35		1.5	

Коэффициенты регрессии вычисляются по формуле

$$b_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_{ji} \overline{y_i},$$

в которых используются кодированные значения факторов, т. е.

$$b_1 = \frac{1}{4} \cdot (-5.4953 + 5.4671 - 5.5500 + 5.5117) = -1.66 \cdot 10^{-2},$$

$$b_2 = \frac{1}{4} \cdot (-5.4953 - 5.4671 + 5.5500 + 5.5117) = 2.48 \cdot 10^{-2}.$$

Получаем оценку для вектора градиента

$$\overrightarrow{\operatorname{grad} y} = \{b_1; b_2\} = \left\{-1.66 \cdot 10^{-2}; 2.48 \cdot 10^{-2}\right\}.$$

Градиент указывает направление наискорейшего возрастания функции. Направление наискорейшего убывания функции совпадает с вектором антиградиента, т. е. с вектором, координаты которого равны координатам градиента, но с противоположными знаками.

Итак, для движения в сторону минимума функции y факторы X_1 и X_2 нужно изменять по формулам

$$X_i = X_i^{(0)} - \lambda b_i \Delta X_i \quad (\lambda > 0).$$

Практически поступают следующим образом. Для каждого фактора вычисляют произведение $b_i \Delta X_i$. Затем выбирают базовый фактор X_l, для которого это произведение оказалось максимальным по абсолютной величине. В нашем случае это фактор X_2. Выберем для него шаг варьирования δ_2 в опытах крутого восхождения. Поскольку ищется минимум функции отклика, знак δ_2 выбираем противоположным знаку b_2. Возьмем $\delta_2 = -0.1$. Значение шага варьирования для первого фактора получаем из пропорции $\dfrac{\delta_1}{b_1 \Delta X_1} = \dfrac{\delta_2}{b_2 \Delta X_2}$ и для удобства округляем:

$$\delta_1 = -1.66 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{-0.1}{2.48 \cdot 10^{-3}} = 0.0669 \approx 0.07.$$

Теперь рассчитываем условия нескольких опытов крутого восхождения по формуле

$$X_i^{(n)} = X_i^{(0)} + n\delta_{i,\text{округл}}.$$

В первом опыте надо вычислить значение функции y при $X_1 = 3 + 0.07 = 3.07$, $X_2 = 2 - 0.1 = 1.9$; во втором — при $X_1 = 3 + 2 \cdot 0.07 = 3.14$, $X_2 = 2 - 2 \cdot 0.1 = 1.8$ и т. д.

Движение в направлении антиградиента продолжают до достижения частного экстремума в данном направлении. Поскольку результат третьего опыта оказался хуже результата второго опыта, движение в направлении антиградиента следует прекратить и поставить новую серию опытов с центром в наилучшей точке.

II серия опытов. Центр эксперимента — точка с координатами $X_1^0 = 3.14$, $X_2^0 = 1.8$ (условия наилучшего опыта предыдущей серии). Уменьшим интервалы варьирования факторов, положим $\Delta X_1 = \Delta X_2 = 0.06$. По результатам ПФЭ 2^2 (см. таблицу) определяем коэффициенты $b_1 = -3.175 \cdot 10^{-3}$, $b_2 = 1.775 \cdot 10^{-3}$.

II серия опытов	x_1	X_1	x_2	X_2	y
X_i^0		3.14		1.8	
ΔX_i		0.06		0.06	
$X_i^{\max}$		3.2		1.86	
$X_i^{\min}$		3.08		1.74	
ПФЭ	x_1	X_1	x_2	X_2	y
Опыт 1 (8)	$-$	3.08	$-$	1.74	5.4582
Опыт 2 (9)	$+$	3.2	$-$	1.74	5.4541
Опыт 3 (10)	$-$	3.08	$+$	1.86	5.4640
Опыт 4 (11)	$+$	3.2	$+$	1.86	5.4554
b_j		$-3.175 \cdot 10^{-3}$		$1.775 \cdot 10^{-3}$	
$b_j \Delta X_j$		$-1.905 \cdot 10^{-4}$		$1.065 \cdot 10^{-4}$	
δ_j		0.06		-0.0335	
$\delta_{j,\text{округл}}$		0.06		-0.03	
МКВ		X_1		X_2	
(14)		3.17		1.785	5.4537
Опыт 1 (12)		3.2		1.77	<u>5.4529</u>
(15)		3.23		1.755	5.4531
Опыт 2 (13)		3.26		1.74	5.4541
Опыт 3		3.32		1.71	
Опыт 4		3.38		1.68	
Опыт 5		3.44		1.65	

Поскольку $|b_1 \Delta X_1| = 1.905 \cdot 10^{-4} > 1.065 \cdot 10^{-4} = |b_2 \Delta X_2|$, базовый фактор — X_1. Положим $\delta_1 = 0.06$, тогда

$$\delta_2 = 1.065 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{0.06}{-1.905 \cdot 10^{-4}} = -0.0335, \qquad \delta_{2,\text{округл}} = -0.03.$$

Рассчитаем условия опытов крутого восхождения: в первом опыте $X_1 = 3.14 + 0.06 = 3.2$, $X_2 = 1.8 - 0.03 = 1.77$; во втором опыте $X_1 = 3.14 + 2 \cdot 0.06 = 3.26$, $X_2 = 1.8 - 2 \cdot 0.03 = 1.74$ и т. д.

Поскольку наилучшим оказался первый опыт крутого восхождения (опыт 12), это значит, что выбран слишком большой шаг варьирования. Поставим дополнительно опыт 14 при условиях $X_1 = = X_1^0 + 0.5\delta_1 = 3.17$, $X_2 = X_2^0 + 0.5\delta_2 = 1.785$ и опыт 15 при условиях $X_1 = X_1^0 + 1.5\delta_1 = 3.23$, $X_2 = X_2^0 + 1.5\delta_2 = 1.755$. Наилучший результат получен в 12-м опыте.

III серия опытов ставится с центром в точке $X_1^0 = 3.2$, $X_2^0 =$

$= 1.77$. Положим $\Delta X_1 = \Delta X_2 = 0.02$. Результаты эксперимента приведены в таблице.

III серия опытов	x_1	X_1	x_2	X_2	y
X_i^0		3.2		1.77	
ΔX_i		0.02		0.02	
$X_i^{\max}$		3.22		1.79	
$X_i^{\min}$		3.18		1.75	
ПФЭ	x_1	X_1	x_2	X_2	y
Опыт 1 (16)	$-$	3.18	$-$	1.75	5.4539
Опыт 2 (17)	$+$	3.22	$-$	1.75	5.4534
Опыт 3 (18)	$-$	3.18	$+$	1.79	5.4533
Опыт 4 (19)	$+$	3.22	$+$	1.79	5.4522
b_j	$-4 \cdot 10^{-4}$		$-4.5 \cdot 10^{-4}$		
$b_j \Delta X_j$	$-8 \cdot 10^{-6}$		$-9 \cdot 10^{-6}$		
δ_j	0.0177		0.02		
$\delta_{j,\text{округл}}$	0.018		0.02		
МКВ	X_1		X_2		
Опыт 1 (20)	3.218		1.79		5.4523
Опыт 2 (21)	3.236		1.81		5.45199
(23)	3.245		1.82		<u>5.45197</u>
Опыт 3 (22)	3.254		1.83		5.45203

Поскольку результаты 21-го и 22-го опытов совпадают при округлении до четвертого десятичного знака, поставим 23-й опыт при условиях $X_1 = 3.245,\ X_2 = 1.82$.

Можно попытаться провести IV серию опытов с центром в точке $X_1^0 = 3.245,\ X_2^0 = 1.82$ и малыми интервалами варьирования $\Delta X_1 = \Delta X_2 = 0.005$.

Поскольку наблюдается улучшение результата в четвертом десятичном знаке, можем продолжить эксперимент.

V серия опытов — с центром в точке $X_1^0 = 3.265,\ X_2^0 = 1.8$. Возьмем $\Delta X_1 = \Delta X_2 = 0.002$.

Поскольку в опытах крутого восхождения не наблюдается улучшения результата в четвертом десятичном знаке по сравнению с опытами ПФЭ в V серии опытов, эксперимент следует завершить.

Наименьшее значение функции $y_{\min} = 5.45152$, полученное эмпирическим путем, достигается при $X_1 = 3.2678,\ X_2 = 1.804$.

IV серия опытов		X_1		X_2	
X_i^0		3.245		1.82	
ΔX_i		0.005		0.005	
$X_i^{\max}$		3.25		1.825	
$X_i^{\min}$		3.24		1.815	
ПФЭ	x_1	X_1	x_2	X_2	y
Опыт 1 (24)	$-$	3.24	$-$	1.815	5.45198
Опыт 2 (25)	$+$	3.25	$-$	1.815	5.45179
Опыт 3 (26)	$-$	3.24	$+$	1.825	5.45219
Опыт 4 (27)	$+$	3.25	$+$	1.825	5.45198
b_j		-10^{-4}		10^{-4}	
$b_j \Delta X_j$		$-5 \cdot 10^{-7}$		$5 \cdot 10^{-7}$	
δ_j		0.005		-0.005	
МКВ		X_1		X_2	
Опыт 1 (25)		3.25		1.815	5.45179
Опыт 2 (26)		3.255		1.81	5.45166
Опыт 3 (27)		3.26		1.805	5.45158
Опыт 4 (28)		3.265		1.8	5.45156
Опыт 5 (29)		3.27		1.795	5.45159

V серия опытов		X_1		X_2	
X_i^0		3.265		1.8	
ΔX_i		0.002		0.002	
$X_i^{\max}$		3.267		1.802	
$X_i^{\min}$		3.263		1.798	
ПФЭ	x_1	X_1	x_2	X_2	y
Опыт 1 (32)	$-$	3.263	$-$	1.798	5.45159
Опыт 2 (31)	$+$	3.267	$-$	1.798	5.45157
Опыт 3 (29)	$-$	3.263	$+$	1.802	5.45156
Опыт 4 (33)	$+$	3.267	$+$	1.802	5.45153
b_j		$-1.25 \cdot 10^{-5}$		$-1.75 \cdot 10^{-5}$	
$b_j \Delta X_j$		$-2.5 \cdot 10^{-8}$		$-3.5 \cdot 10^{-8}$	
δ_j		0.0014		0.002	
МКВ		X_1		X_2	
Опыт 1 (34)		3.2664		1.802	5.45154
Опыт 2 (35)		3.2678		1.804	5.45152
Опыт 3 (36)		3.2692		1.806	5.45155

Теоретический минимум заданной функции может быть вычислен по формуле $y_{\min} = 3\sqrt[3]{abc} = 5.45136$. (Заметим, что найденные эмпирическим путем оптимальные условия факторов отличаются от теоретических $X_1 = 3.3019$, $X_2 = 1.8171$.)

Приложение

Таблица значений F-критерия Фишера $F_{\alpha;\nu_1;\nu_2}$ в зависимости от числа степеней свободы ν_1 и ν_2 при уровне значимости $\alpha = 0.05$.

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8
1	161	200	216	225	230	234	237	239
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36

Таблица значений критерия Кохрена $G_{\alpha;\nu_1;\nu_2}$ в зависимости от числа степеней свободы ν_1 и ν_2 при уровне значимости $\alpha = 0.05$.

ν_2 \ ν_1	1	2	3
8	0.6798	0.5157	0.4377

Квантили t-распределения Стьюдента

(значения $t_{\alpha;\nu}$ в зависимости от числа степеней свободы ν и вероятности α: $(|t_\nu| > t_{\alpha;\nu}) = \alpha$)

ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\alpha = 0,05$	12,71	4,30	3,18	2,78	2,57	2,45	2,37	2,31	2,26	2,23
$\alpha = 0,1$	6,31	2,92	2,35	2,13	2,02	1,94	1,90	1,86	1,83	1,81

ν	11	12	16	20	24	30	40	60	120	∞
$\alpha = 0,05$	2,20	2,18	2,12	2,09	2,06	2,04	2,02	2,00	1,98	1,96
$\alpha = 0,1$	1,80	1,78	1,75	1,73	1,71	1,70	1,68	1,67	1,66	1,64

Список литературы

[1] Адлер Ю.П., Маркова Е.В., Грановский Ю.В. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. — М.: Наука, 1976.

[2] Ахназарова С.Л., Кафаров В.В. Методы оптимизации эксперимента в химической технологии. — М.: Высшая школа, 1985.

[3] Грачев Ю.П. Математические методы планирования экспериментов. — М.: Пищевая промышленность, 1979.

[4] Красовский Г.И., Филаретов Г.Ф. Планирование эксперимента. — Минск: БГУ, 1982.

[5] Пижурин А.А., Розенблит М.С. Исследование процессов деревообработки. — М.: Лесная промышленность, 1984.

[6] Статистические методы в инженерных исследованиях. Лабораторный практикум / Под ред. Г.К. Круга. — М.: Высшая школа, 1983.

Оглавление

ПЛАНИРОВАНИЕ И ОРГАНИЗАЦИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

Составитель Блинова Елена Ивановна
Редактор М.Ф. Мурашко. Корректор Н.В. Гвасалия.
Подписано в печать 15.12.2000. Формат $60 \times 84^1/16$.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 2,5. Усл. кр.-отт. 2,5. Уч.-изд. л. 2,1.
Тираж 50 экз. Заказ .
Белорусский государственный технологический университет.
Лицензия ЛВ № 276 от 15.04.98. 220050. Минск, Свердлова, 13а.
Отпечатано на ротапринте Белорусского государственного технологического университета. 220050. Минск, Свердлова, 13.

Содержание