

# ДИНАМИКА СИСТЕМ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Учебное пособие

Юдинцев В. В.

28 апреля 2008 г.

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>1 Исходные данные</b>	<b>7</b>
1.1 Структура механической системы . . . . .	7
1.1.1 Определения теории графов . . . . .	9
1.1.2 Задание графов на ЭВМ . . . . .	11
<b>2 Уравнения движения в декартовых координатах</b>	<b>18</b>
2.1 Координатная запись уравнений движения . . . . .	18
2.2 Уравнения движения свободного тела . . . . .	22
2.3 Уравнения связи «точка-плоскость» . . . . .	24
2.4 Уравнения связи ограничивающее относительное вращение двух тел . . . . .	28
2.5 Уравнения связи для плоских механических систем . . . . .	30
2.6 Примеры . . . . .	32
2.6.1 Уравнения связи сферического шарнира и цилиндрического шарниров . . . . .	32
2.6.2 Кривошипно-шатунный механизм. . . . .	35
2.7 Перестановка элементов матрицы . . . . .	39
<b>3 Уравнения движения в обобщенных координатах</b>	<b>44</b>
3.1 Уравнения движения . . . . .	44
3.2 Системы тел со структурой дерева, соединенные сферическими шарнирами . . . . .	44
3.2.1 Раскрытие створок солнечных батарей . . . . .	53
3.2.2 Плоские цилиндрические шарниры . . . . .	56
3.2.3 Системы не связанные с внешним телом . . . . .	62
3.3 Системы с цилиндрическими и универсальными шарнирами . . . . .	69
3.3.1 Управляемые переменные . . . . .	73
3.4 Системы тел со структурой дерева, соединенные шарнирами общего вида . . . . .	74
3.4.1 Принцип Даламбера для системы тел . . . . .	74
3.4.2 Кинематические отношения . . . . .	76
3.4.3 Возможная работа в шарнирах . . . . .	89
3.4.4 Уравнения движения . . . . .	89
3.4.5 Уравнения движения систем со фиктивным шарниром . . . . .	90
3.5 Метод отдельных тел . . . . .	92
3.6 Системы тел с замкнутой структурой . . . . .	101

3.6.1	Уравнения связи . . . . .	105
3.6.2	Возможная работа в разрезанных шарнирах . . . . .	106
	<b>Список литературы</b>	<b>110</b>

## Введение

Системы многих тел - это механические системы, состоящие из конечного числа абсолютно твёрдых или упругих тел, которые соединены шарнирами, допускающими относительное движение смежных тел. Частным случаем таких систем являются системы, состоящие только из абсолютно твёрдых тел - системы твёрдых тел.

В технике и природе существует много задач требующих изучения систем многих тел: исследование движения живых организмов, их образов в технике - роботов, автомобилей, летательных аппаратов, механизмов. Многие механические системы, возникающие при решении этих задач можно рассматривать как системы связанных твердых тел. Фундаментом динамики систем твердых тел является классическая механика, основы которой были заложены в XVII-IX веках Ньютоном, Эйлером, Даламбером, Лагранжем. Понятие «абсолютно твердое тело», которое является простейшей системой было введено в 1775 году Эйлером: моделируя связи в шарнирах силами реакций, он получил уравнения, известные в механике как уравнения Ньютона-Эйлера. В 1743 году Даламбер рассмотрел систему связанных твердых тел и силы реакций он назвал «потерянными» силами. Позже математическую формулировку принципа Даламбера представил Лагранж: применив вариационный принцип к кинетической и потенциальной энергии системы с учетом ее кинематических связей, Лагранж получил уравнения движения, известные как уравнения Лагранжа первого и второго рода [13], [12].

В 1906 году Фишер [2] предпринял первые попытки исследований в области биомеханики на основе системы абсолютно твердых тел. Фишер рассматривал движение руки человека как системы трех связанных тел. Уравнения движения рассматриваемой системы были получены при помощи уравнений Лагранжа второго рода. Выбор обобщенных координат и сам способ вывода уравнений привел к тому, что сами уравнения движения получились громоздкими. Отсутствие вычислительной техники в то время не позволило использовать полученные результаты и поэтому работа Фишера осталась незамеченной.

Развитие науки и техники, быстрое развитие ЭВМ, появившихся в 1950-х годах, стимулировали дальнейшее развитие методов механики. В 1955 году Денавит и Харгенберг разработали матричный аппарат пространственной кинематики твердых тел, который в 1965 году Уикер впервые применил к динамике. Эти работы можно рассматривать как отправную точку развития вычислительной механики. В то же время предпринимаются первые попытки применить вычислительные машины для синтеза уравнений движения системы тел. Оказалось, что *непосредствен-*

*ный перенос алгоритмов ручного вывода на ЭВМ – идея не слишком удачная.* Вычисления частных производных и производных по времени на ЭВМ трудная задача, а промежуточные выражения настолько громоздки, что для некоторых задач недостаточно ресурсов компьютеров. Потребность в эффективных алгоритмах вывода уравнений побудила к развитию и переработке методов классической механики с ориентацией на использование ЭВМ. Первыми в этой области стали работы Робертсона и Виттенбурга, Вукобратовича, Шилена и Кройцера. В этих работах представлен так называемый прямой метод формирования системы уравнений движения, замечательной особенностью которого является использование соотношений, использующих только алгебраические матричные операции умножения и сложения. Прямой метод получил развитие в работах Физерстоуна, Верещагина, Айхбергера, Погорелова, результатами которых являются различные модификации более эффективных методов составных тел и отдельных тел.

В ракетно космической технике множество задач, требующих рассмотрения систем многих тел, прежде всего это относится к системам отделения [11]. Системы отделения отработавших блоков, капотирующих устройств, системы раскрытия солнечных батарей и других подвижных элементов конструкции КА - все эти системы, с точки зрения механики, можно рассматривать как системы связанных тел. Особенностью этих систем, которую необходимо учитывать при формировании уравнений движения является их переменная структура, то есть в процессе движения меняется количество степеней свободы и структура соединений тел между собой.

В некоторых случаях нелинейные упругие системы можно представить в виде системы связанных твердых тел соединенных шарнирами с упругими элементами. Этот метод называется методом твердотельных элементов. Обычно, таким образом моделируют балочные конструкции, кабели [10], однако были успешные попытки моделирования пластин [4]. Представление нелинейных упругих систем твердыми элементами часто бывает более эффективным, чем непосредственное решение нелинейной модели.

В настоящем пособии рассматриваются методы формирования уравнений движения механических систем твердых тел в форме пригодной и удобной для дальнейшего решения на ЭВМ. В основу пособия положена монография Й. Виттенбурга [7], который одним из первых предложил метод формирования уравнений движения систем твердых тел пригодный для эффективной реализации на ЭВМ. В пособии представлены реализации некоторых алгоритмов моделирования систем твердых тел на языке математического пакета «MATLAB». Учебное пособие напи-

сано на основе лекций, которые читаются студентам старших курсов, обучающимся по специальности 010500–«Механика» в Самарском государственном аэрокосмическом университете. Пособие может быть полезно при выполнении курсовых работ и при дипломном проектировании, а также аспирантам и специалистам-практикам, занимающимся проектированием и анализом динамики сложных механических систем.

# 1 Исходные данные

## 1.1 Структура механической системы

Для полного описания системы многих тел требуется большое число параметров, характеризующих геометрию системы, распределение масс, природу внешних и внутренних сил. Параметры, описывающие структуру и распределение масс систем можно разделить на следующие группы [7]:

- число тел;
- параметры, характеризующие структуру взаимосвязей тел;
- параметры, характеризующие кинематические связи;
- параметры, характеризующие расположение шарниров на телах;
- массы и моменты инерции тел.

Рассмотрим способы задания структуры тел механической системы. Два тела будем называть *смежными* тогда и только тогда, когда они непосредственно оказывают силовое воздействие друг на друга. Соединение между смежными телами называется *шарниром*. Это определение придает слову шарнир более широкий смысл. Здесь и далее оно используется для любого рода соединений, допускающих относительные вращательное и поступательное движения смежных тел, поэтому контакт двух тел в точке тоже считается шарниром, кроме того, шарнир может не быть материальной, например, в случае передачи взаимодействия через силовые поля. В шарнире объединены все силы взаимодействия между двумя смежными телами, так что каждая пара смежных тел имеет только один шарнир. Например, на рисунке 1.1 шарнир между телами 1 и 2 включает как шаровое шарнирное соединение, так и пружину. Кроме того, для каждого шарнира существует только одна пара смежных тел. Это означает, что если, например, три тела соединены, как кажется на первый взгляд одним шарниром, то этот шарнир будет считаться состоящим из двух отдельных шарниров, каждый из которых соединяет два тела. Система из трех тел, изображенная на рисунке 1.1, иллюстрирует подобную ситуацию. Описание структуры взаимосвязей системы дает полную информацию о том, какие тела системы соединены шарнирами. Физические свойства шарниров в это описание не включаются. Кинематические связи, реализуемые в шарнирах, могут быть любого вида: стационарными, нестационарными, голономными или неголономными.

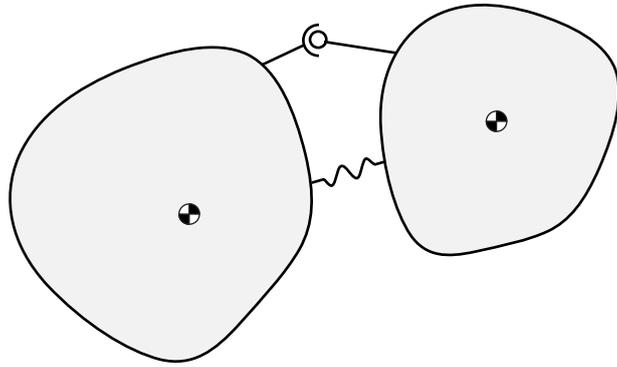


Рис. 1.1: Шарнир с пружиной

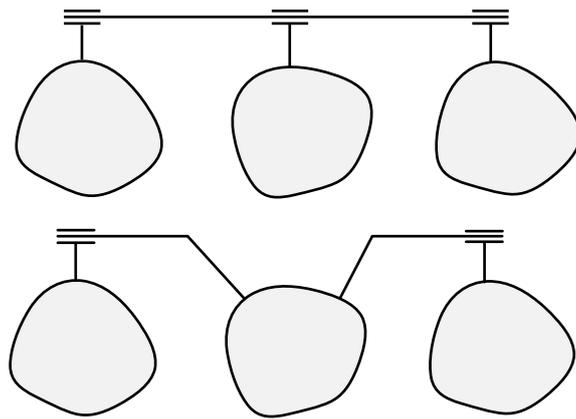


Рис. 1.2: Система трех тел

Кинематические связи вводятся не только индивидуальными шарнирами, но также структурой взаимосвязей системы, так, например, в плоском кривошипно-ползунном механизме тела системы соединены тремя цилиндрическими шарнирами и одним скользящим соединением; основание считается неподвижным в инерциальном пространстве; общее число степеней свободы системы не изменится, если мы заменим один цилиндрический шарнир на сферический. С другой стороны, это число станет равным нулю, если оси трех шарниров смонтировать не параллельно одна другой.

На практике системы многих тел функционируют в различных ситуациях. В большинстве систем одно или несколько тел связаны шарнирами с внешним телом, положение которого в инерциальном пространстве является заданной функцией времени. Очевидно, что размеры и инерциальные свойства внешнего тела несущественны, поскольку его движение задано. По этой причине внешнее тело не будет считаться телом системы, а будет представлено подвижным базисом, неизменно связанным с ним.

### 1.1.1 Определения теории графов

Рассмотрим систему состоящую из  $n + 1$  тел, связанных между собой  $m$  шарнирами. Телам и шарнирам присвоим номера от 0 до  $n$  и от 1 до  $m$  соответственно. Обычно одно из тел системы имеет предварительно заданное известное движение. Это тело получает индекс 0. Отобразим графически структуру соединений тел друг с другом, обозначив тела точками или кругами, а соединения между двумя телами изобразим линией, соединяющей два тела. Удобно для описания структуры соединения тел механической системы использовать теорию графов [14].

Графом  $G(S, U)$  называется совокупность двух множеств - не пустого множества  $S$  (множества вершин) и множества  $U$  неупорядоченных пар различных элементов множества  $S$  ( $U$  - множество ребер). Обозначение графа: Число вершин графа  $G$  обозначим  $p$ , число ребер -  $q$ . Обычно граф изображают диаграммой: вершины точками или кружками, ребра - линиями. Рассматриваемой системе сопоставим граф с  $n + 1$  вершинами, которые соответствуют телам системы, а  $m$  ребер. Таким образом, структура системы описывается соответствующим ей графом. Рассмотрим некоторые понятия теории графов, необходимые в дальнейшем.

Пусть  $s_1, s_2$  - вершины,  $u = (s_1, s_2)$  - соединяющие их ребро. Тогда вершина  $s_1$  и ребро  $u$  *инцидентные*, вершина  $s_2$  и ребро  $u$  также инцидентные. Два ребра, инцидентные одной вершине называются *смежными*; две вершины, инцидентные одному ребру, также называются смеж-

ными. Если в графе ориентировать все ребра то получается оргграф.

*Маршрутом* в графе называется чередующаяся последовательность вершин и ребер, в которой любые два соседних элемента инцидентны. Если все ребра маршрута различны, то маршрут называется *цепью*. Если все вершины (а значит, и ребра) различны, то маршрут называется *простой цепью*. Говорят, что две вершины в графе *связаны*, если существует соединяющая их (простая) цепь.

Граф, в котором все вершины связаны, называется *связанным*. Очевидно, что если структура механической системы описывается несвязанным графом, то эту систему можно рассматривать как две независимые системы, поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать только связанные графы.

Замкнутая цепь называется *циклом*. Замкнутая простая цепь называется *простым циклом*. Граф без циклов называется *ациклическим*. Для оргграфов цепь называется путем, а цикл – контуром.

Связанный ациклический граф называется *деревом*. Для оргграфа число дуг исходящих из вершины называется *полустепенью исхода*, а число входящих дуг – *полустепенью захода*. Ориентированным деревом называется граф со следующими свойствами: существует единственный узел, полустепень захода которого равна 0, он называется корнем дерева; полустепень захода всех остальных узлов равна 1; каждый узел достижим из корня.

Дуга, предшествующая вершине  $s_k$  ( $k \neq 0$ ), представляет собой дугу, которая принадлежит пути между  $s_0$  и  $s_k$  и которая, кроме того, инцидентна  $s_k$ . Вершина, предшествующая вершине  $s_k$  ( $k \neq 0$ ), есть вершина, которая связана с  $s_k$  дугой, предшествующей  $s_k$ . Следует отметить что механические системы тел в большинстве своем имеют циклическую структуру.

*Взвешенный* граф – это граф дугам которого поставлено в соответствие некоторое число, называемое *весом*. В механических системах твердых тел весом будет число степеней свободы в сочленении.

*Ориентированный* граф задаёт выбор *базисного тела*; сложное движение всей системы твердых тел раскладывают на базисные движения, допускающие сравнительно простое описание и исследование с последующим объединением этих движений. Базисные движения это относительные движения в шарнирах. Простота описания относительного движения зависит от выбора базисного тела, тела относительно которого будет задаваться движения его смежной пары. Классический пример, иллюстрирующий неравноценность такого выбора представлен на рис. 1.4. Движение тела 2 относительно тела 1 задается сравнительно просто: точка, принадлежащая телу 2 движется по некоторой кривой, свя-

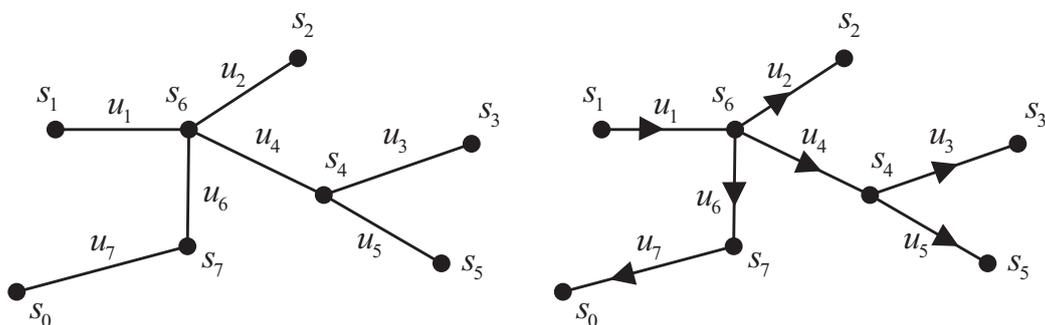


Рис. 1.3: Граф, ориентированный граф.

занной и неизменной в теле 1. Тело 2 также может вращаться вокруг касательной к кривой тела 1 в точке контакта, следовательно тело 2 относительно тела 1 имеет две степени свободы. Очевидно, что задать же движение тела 1 относительно тела 2 много сложнее.

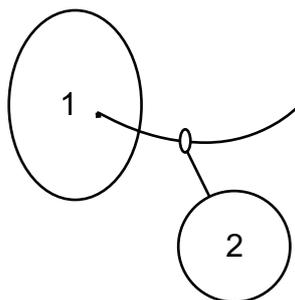


Рис. 1.4: Система двух тел

### 1.1.2 Задание графов на ЭВМ

Рассмотрим некоторые способы представления графов на ЭВМ.

*Матрица смежности.* Граф представляется с помощью квадратной булевой матрицы  $M_{p \times p}$ :

$$M(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } v_i \text{ смежна с вершиной } v_j; \\ 0, & \text{если вершины } v_i \text{ } v_j \text{ не смежны.} \end{cases}$$

Матрица смежности для графа, изображенного на рисунке 1.3:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ориентированный граф можно описать при помощи двух целочисленных функций, определенных для каждой вершины  $a$ :  $i^+(a)$ ,  $i^-(a)$ , которые устанавливают соотношения между индексами дуг и вершин. Первая функция определяет номер вершины из которой дуга  $u_a$  выходит, вторая соответствует индексу вершины в которую дуга  $u_a$  входит. Для ориентированного графа, изображенного на рисунке 1.3, эти функции принимают значения, указанные в таблице 1.1:

Таблица 1.1: Функции  $i^+(a)$  и  $i^-(a)$  для ориентированного графа на рисунке 1.3.

Дуги	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$	$u_5$	$u_6$	$u_7$
$i^+(a)$	1	6	4	6	4	6	7
$i^-(a)$	6	2	3	4	5	7	0

Если для ориентированного графа со структурой дерева заданы пары функций  $i^+(a)$  и  $i^-(a)$ , то по ним можно восстановить сам граф, то есть существует взаимно однозначное соответствие между ориентированным графом и функциями  $i^+(a)$  и  $i^-(a)$ . Однако, это не означает, что для любой произвольно выбранной пары функций существует ориентированный граф со структурой дерева. Та же самая информация, которая содержится в паре функций  $i^+(a)$  и  $i^-(a)$  содержится и в *матрице инцидентности*. Как следует из определения матрица инцидентности  $S$  отражает инцидентность вершин и ребер. Размерность матрицы инцидентности  $p \times q$ . Для неориентированного графа элементы матрицы определяются следующим образом:

$$S(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } v_i \text{ инцидентна ребру } e_j; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для ориентированного графа элементы матрицы могут принимать три

разных значения:

$$S(i, j) = \begin{cases} -1, & v_i \text{ инцидентна ребру } e_j \text{ и } e_j \text{ входит в эту вершину;} \\ 0, & v_i \text{ и ребро } e_j \text{ не инцидентны;} \\ 1, & v_i \text{ инцидентна ребру } e_j \text{ и } e_j \text{ исходит из этой вершины.} \end{cases}$$

Для графа представленного на рисунке 1.3 матрицы инцидентности будет иметь следующий вид:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & -1 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & +1 & 0 & +1 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & +1 \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы инцидентности можно выразить через функции  $i^+(j)$  и  $i^-(j)$  следующим образом:

$$S(i, a) = \begin{cases} 1, & i = i^+(a), \\ -1, & i = i^-(a), \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (1.1)$$

Для графа со структурой дерева каждый столбец матрицы инцидентности содержит только один не нулевой элемент равный  $+1$  и один элемент равный  $-1$ . Матрицу  $\mathbf{S}$  можно разделить на две части матрицу строку  $\mathbf{S}_0$  и квадратную матрицу  $\mathbf{S}$ :

$$\mathbf{S}_0 = (S_{01} \ S_{02} \ \dots \ S_{0n}), \quad (1.2)$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1n} \\ \vdots & & & \\ S_{n1} & S_{n2} & \dots & S_{nn} \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

По ориентированному графу можно построить и другую матрицу с элементами  $+1$  и  $-1$ , а именно матрицу  $T$ . В отличие от матрицы  $S$ , строки матрицы  $T$  соответствуют дугам, а столбцы вершинам.

$$T(a, i) = \begin{cases} 1, & u_a \text{ принадлежит пути от } s_0 \text{ к } s_i \text{ и направлена к } s_0, \\ -1, & u_a \text{ принадлежит пути от } s_0 \text{ к } s_i \text{ и направлена к } s_i, \\ 0, & u_a \text{ не принадлежит пути от } s_0 \text{ к } s_i. \end{cases}$$

Для матриц  $T$  и  $S$  выполняются следующие соотношения:

$$\mathbf{T}^T \mathbf{S}_0^T = -\mathbf{1}_n, \quad (1.4)$$

$$\mathbf{TS} = \mathbf{ST} = \mathbf{E}. \quad (1.5)$$

Действительно в матрице  $S_0$  отличен от нуля только первый элемент  $S_{01}$ , но согласно определению матрицы  $T$  все элементы ее первой строки равны  $-S_{01}$ . Рассмотрим выражение 1.5, это выражение представляет собой  $(n \times n)$  матрицу с элементами  $(\mathbf{TS})_{ab} = \sum_{i=1}^n T_{ai} S_{ib}$  ( $a, b = 1, \dots, n$ ). Согласно (1.1)  $S_{ib}$  равно  $+1$  для  $i = i^+(b)$ ,  $-1$  для  $i = i^-(b)$  и  $0$  во всех других случаях. Таким образом  $(\mathbf{TS})_{ab} = T_{ai^+(b)} - T_{ai^-(b)}$ . Рассмотрим случай когда  $a = b$ . Дуга  $u_a = u_b$  либо направлена к  $s_0$ , либо выходит из  $s_0$ . В первом случае  $T_{ai^+(b)} = 1$ , а  $T_{ai^-(b)} = 0$ . Во втором случае  $T_{ai^+(b)} = 0$ , а  $T_{ai^-(b)} = -1$ . Очевидно, что в любом случае  $(\mathbf{TS})_{aa} = 1$ . Рассмотрим случай различных  $a$  и  $b$ . Рассмотрим два пути: между  $s_0$  и  $s_{i^+(b)}$  и между  $s_0$  и  $s_{i^-(b)}$ . Дуга  $u_a$  принадлежит каждому из путей, либо не принадлежит ни одному из них. В любом случае  $T_{ai^+(b)} = T_{ai^-(b)}$ , и, следовательно,  $(\mathbf{TS})_{ab} = 0$ . Из определения  $T_{ai}$  следует, что в столбце  $j$  матрицы  $\mathbf{T}$  множество индексов строк всех ненулевых элементов совпадает с множеством индексов всех дуг, принадлежащих пути между  $s_0$  и  $s_j$ . Например, столбец 7 матрицы для графа, изображенного на рис. 1.3, дает множество дуг  $u_1$ ,  $u_2$  и  $u_3$ . Как показывает этот пример, порядок расположения дуг вдоль пути из  $s_0$  в  $s_j$  нельзя определить только из столбца  $j$  матрицы. Однако его можно найти, рассматривая всю матрицу. Это следует из того, что  $\mathbf{S}$  определяется по , функции  $i^+(a)$  и  $i^-(a)$  находятся по  $\mathbf{S}$ , а по указанным функциям можно построить ориентированный граф. Имеется простой способ определения порядка дуг вдоль пути между  $s_0$  и  $s_j$ , использующий обе матрицы  $\mathbf{T}$  и  $\mathbf{S}$ . На каждом шаге для некоторой вершины  $s_k$  определяются предшествующая ей дуга  $u_a$  и вершина  $s_j$ . На первом шаге вершиной  $s_k$  является вершина  $s_j$ . На каждом последующем шаге в качестве  $s_k$  берется предшествующая вершина  $s_i$ , определенная на предыдущем шаге. Процедура заканчивается, когда  $s_i$  совпадает с  $s_0$ . Упорядоченная последовательность предшествующих дуг, определенная таким образом, представляет собой последовательность, в которой дуги расположены в определенном порядке вдоль пути из  $s_j$  в  $s_0$ . Остается показать, как можно найти предшествующие  $s_k$  ( $k \neq 0$ ) дугу  $u_a$  и вершину  $s_i$  по матрицам  $\mathbf{T}$  и  $\mathbf{S}$ . Обе величины  $S_{ka}$  и  $T_{ak}$  отличны от нуля только для дуги  $u_a$ . Отсюда следует, что  $a$  является пересечением двух множеств индексов, а именно множества индексов  $b$  всех столбцов, для которых  $S_{kb} \neq 0$ , и множества индексов  $c$  всех строк, для которых  $T_{ck} \neq 0$ . Вершиной, предшествующей  $s_i$ , служит одна из

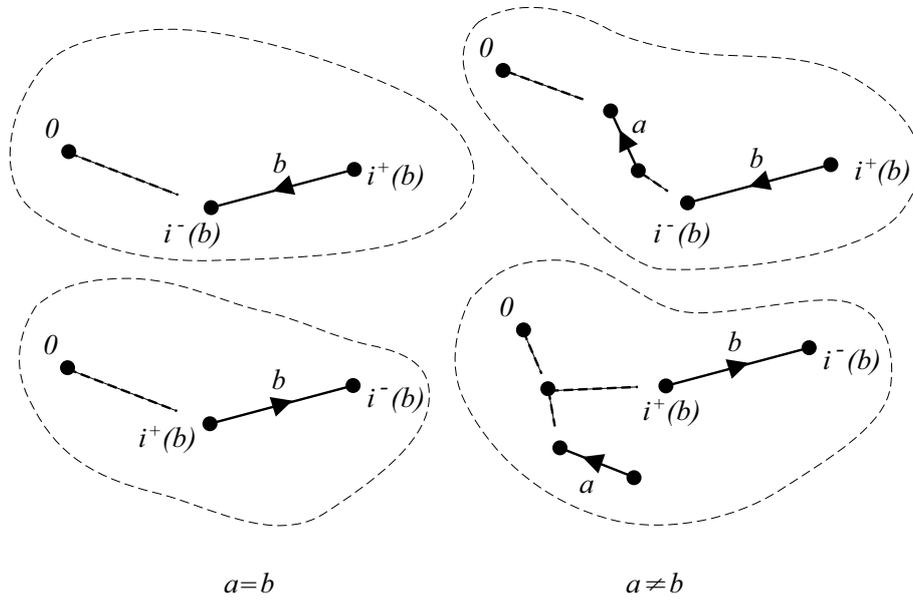


Рис. 1.5: К доказательству соотношения  $\mathbf{TS} = \mathbf{E}$ .

двух вершин  $s_{i^+(a)}$  и  $s_{i^-(a)}$  именно та, которая не совпадает с  $s_k$ . Итак,  $s_i$  находится по столбцу  $a$  матрицы  $\mathbf{S}$ .

В произвольном графе со структурой дерева вершины и дуги можно пронумеровать таким образом, что будут выполнены следующие условия. Для всех вершин  $s_k$  ( $k \neq 0$ ) номер дуги, предшествующей  $s_k$ , равен  $k$ , а номер вершины, предшествующей  $s_k$ , меньше  $k$ . Вообще говоря, способ, при помощи которого можно присвоить номера, удовлетворяющие этим условиям, не является единственным. *Любая такая нумерация называется правильной.* Для произвольного заданного графа с данной вершиной  $s_0$  правильную нумерацию можно получить следующим образом. Граф содержит по меньшей мере одну *граничную вершину*. Граничными вершинами являются все вершины, за исключением  $s_0$  с которыми инцидентна только одна дуга. Этим граничным вершинам присваиваются наибольшие номера  $n, n-1, n-2$  и т.д. Такие же номера даются соответствующим предшествующим дугам. Затем все вершины и дуги, которые уже помечены (кроме  $s_0$ ), отсекаются от графа. В результате получается меньший граф с новыми граничными вершинами, которым в свою очередь присваиваются наибольшие из имеющихся еще в наличии номеров. Эта рекурсивная процедура продолжается до тех пор, пока не окажутся помеченными все вершины и дуги. Поступая таким образом, мы обозначим только, как и прежде, вершину, смежную с  $s_0$ , и дугу, связывающую эти две вершины, соответственно через  $s_1$  и  $u_1$ .

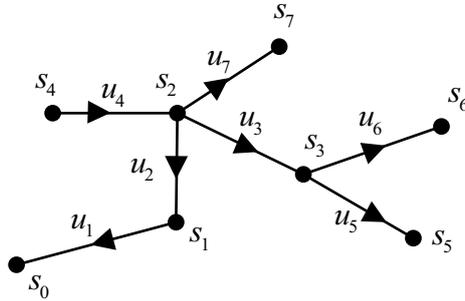


Рис. 1.6: Граф с правильной нумерацией.

Матрицы  $\mathbf{S}$  и  $\mathbf{T}$  для ориентированного графа со структурой дерева, имеющего правильную нумерацию, обладают некоторыми важными свойствами. Так, один из номеров  $i^+(a)$  и  $i^-(a)$ , которые поставлены в соответствие двум вершинам, соединенным дугой  $u_a$  ( $a = 1, \dots, n$ ), совпадает с  $a$ , а другой меньше  $a$ . Как следствие получаем, что все диагональные элементы матрицы  $\mathbf{S}$  отличны от нуля и что все другие ненулевые элементы расположены выше главной диагонали. Кроме того, для  $a = 1, \dots, n$  дуга  $u_a$  принадлежит пути между  $s_0$  и  $s_a$ . Следовательно, все элементы главной диагонали матрицы  $\mathbf{T}$  также не равны нулю. Наконец, дуга  $u_a$  ( $a = 1, \dots, n$ ) может только принадлежать пути между  $s_0$  и такой вершиной  $s_k$ , для которой  $k \geq a$ . Отсюда следует, что в матрице  $\mathbf{T}$ , так же, как и в  $\mathbf{S}$ , ниже главной диагонали нет ненулевых элементов. Выше главной диагонали матрицы  $\mathbf{T}$  ненулевые элементы находятся только в первых  $n - n'$  строках, где  $n'$  – номер граничной вершины в графе. Например, на рисунке 1.6 изображен граф, ранее представленный на 1.3, с новой правильной нумерацией. Направление дуг не изменилось, матрицы  $\mathbf{S}$  и  $\mathbf{T}$  теперь имеют вид

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & +1 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

В этом частном случае  $n'$  равно 3. Если в графе с правильной нумерацией все дуги направлены к  $s_0$ , то все ненулевые элементы  $\mathbf{T}$  и все элементы на главной диагонали  $\mathbf{T}$  равны +1. Если, с другой стороны, все дуги направлены от  $s_0$ , то в этих матрицах все элементы, о которых только что говорилось, равны -1. Рассмотрим снова задачу определения порядка, в котором располагаются дуги вдоль пути от  $s_0$  к  $s_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ). Общий метод, базирующийся на использовании матриц  $\mathbf{S}$  и  $\mathbf{T}$ , был описан ранее. В графе с правильной нумерацией индексы дуг монотонно возрастают вдоль этого пути. Следовательно, порядок можно установить непосредственно по столбцу  $j$  матрицы  $\mathbf{T}$ .

## 2 Уравнения движения в декартовых координатах

Следующим этапом после определения параметров системы и описания её структуры является выбор способа записи уравнений движения. Уравнения движения могут быть записаны в обобщённых координатах, для чего необходимо выбрать параметры однозначно определяющие конфигурацию системы. Полученные впоследствии система уравнений движения будет иметь наименьшую размерность, но во многих случаях сами уравнения будут весьма громоздки.

С другой стороны в качестве параметров задающих положение тел системы можно выбрать «естественные» декартовы координаты и в качестве уравнений движения использовать простые по структуре уравнения Ньютона-Эйлера. Эти уравнения необходимо дополнить уравнениями связи, поскольку координаты тел системы не являются независимыми.

Далее рассмотрим подход при котором для вывода уравнений движения используются декартовы координаты.

### 2.1 Координатная запись уравнений движения

При использовании декартовых координат для вывода уравнений движения получается система из  $6n$  дифференциальных уравнений, где  $n$  число тел в системе. Уравнения движения необходимо дополнить уравнениями связей. Сами уравнения связей выводятся на основе записи для каждого сочленения независимых ограничений, которые сочленение накладывает на движение связанных тел. Таким способом в уравнения движения вводятся столько множителей Лагранжа, сколько имеется ограничений во всех сочленениях. Полученную систему уравнений (дифференциальных и алгебраических) можно решить только при предположении, что алгебраические уравнения (уравнения связей) являются независимыми.

Запишем уравнения движения системы состоящей из двух твердых тел, представляющей собой двойной физический маятник. Для получения уравнений движения можно использовать уравнения Лагранжа, для чего необходимо выбрать обобщенные координаты. Рассматриваемая система имеет две степени свободы, в качестве обобщенных координат можно выбрать углы поворота стержней маятника относительно неподвижной оси. Вывод уравнений движения при помощи уравнений Лагранжа для сложных технических систем приводит к чрезвычай-

но громоздким преобразованиям. Рассмотрим, например, механическую систему раскрытия створок панелей солнечных батарей, схема которой изображена на рис. 2.1. Плоская механическая система состоит из четырех тел и имеет всего две степени свободы. Это система имеет замкнутую структуру, что и определяет сложность вывода уравнений движения с использованием уравнений Лагранжа второго рода. Уравнение движе-

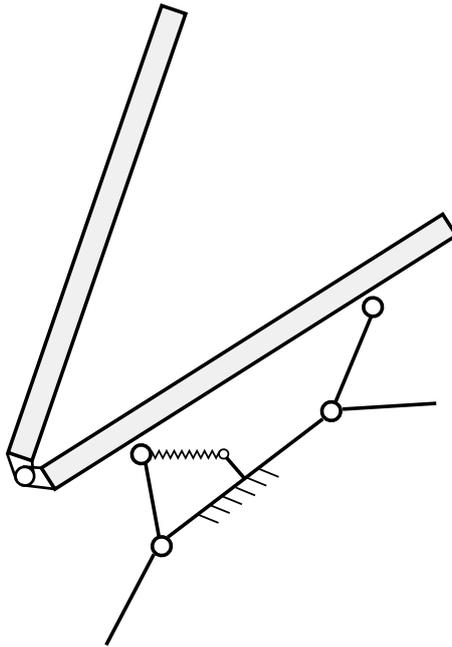


Рис. 2.1: Кинематическая схема солнечной батареи.

ния рассматриваемого двойного физического маятника можно записать и используя декартовы координаты. Выберем начало координат относительно которой будем рассматривать движение исследуемой системы. Далее разорвем шарниры, рис. 2.3, и будем рассматривать каждое тело в отдельности. Положение каждого тела будем задавать тремя параметрами: двумя декартовыми координатами и углом, тогда конфигурация всей системы будет определяться шестью координатами. Запишем уравнения движения каждого тела. В правую часть к активным силам следует добавить силы реакции и моменты реакции. Таким образом, мы получим

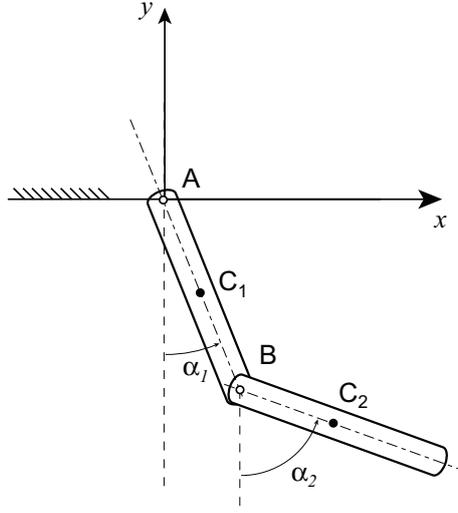


Рис. 2.2: Двойной физический маятник

систему из 6 дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = F_{1x} - R_{10x} + R_{12x}, \\ m_1 \ddot{y}_1 = F_{1y} - R_{10y} + R_{12y}, \\ J_{1z} \ddot{\alpha}_1 = F_{1y} + R_{10x} l_1 \cos \alpha_1 + R_{10y} l_1 \sin \alpha_1 + R_{12x} l_1 \cos \alpha_1 + R_{12y} l_1 \sin \alpha_1, \\ m_2 \ddot{x}_2 = F_{2x} - R_{21x}, \\ m_2 \ddot{y}_2 = F_{2y} - R_{21y}, \\ J_{2z} \ddot{\alpha}_2 = F_{1y} - R_{12x} l_2 \sin \alpha_1 - R_{12y} l_2 \sin \alpha_1, \end{cases} \quad (2.1)$$

Используя только эти уравнения невозможно получить решение, так как правые части содержат неизвестные реакции связей. Чтобы система была замкнута необходимо ее дополнить уравнениями связи. Все пары смежных тела рассматриваемого механизма имеют общую точку - цилиндрический шарнир, относительно которого допустима одна степень свободы двух смежных тел. Очевидно, что координаты шарнирных точек выраженные через параметры движения двух смежных тел должны совпадать, т.е. для тел 1 и 2 уравнение связи примет вид:

$$\begin{cases} x_1 - l_1 \cos(\alpha_1) = 0, \\ y_1 - l_1 \sin(\alpha_1) = 0, \\ x_1 + l_1 \cos(\alpha_1) = x_2 - l_2 \cos(\alpha_2), \\ y_1 + l_1 \sin(\alpha_1) = y_2 - l_2 \sin(\alpha_2), \end{cases} \quad (2.2)$$

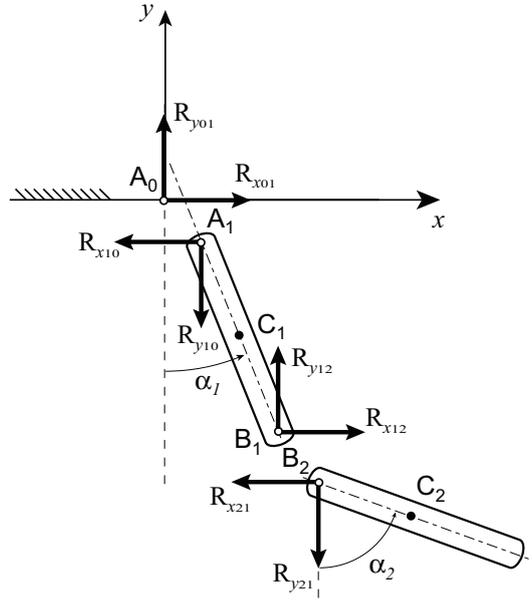


Рис. 2.3: К записи уравнений движения двойного физического маятника

Продифференцируем уравнение связи дважды:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 - l_1 \dot{\alpha}_1 \sin(\alpha_1) = 0, \\ \dot{y}_1 - l_1 \dot{\alpha}_1 \cos(\alpha_1) = 0, \\ \dot{x}_1 + l_1 \dot{\alpha}_2 \cos(\alpha_1) = \dot{x}_2 - l_2 \dot{\alpha}_2 \cos(\alpha_2), \\ \dot{y}_1 + l_1 \dot{\alpha}_2 \sin(\alpha_1) = \dot{y}_2 - l_2 \dot{\alpha}_2 \sin(\alpha_2), \\ \ddot{x}_1 - l_1 \ddot{\alpha}_1 \sin(\alpha_1) - l_1 \dot{\alpha}_1^2 \cos(\alpha_1) = 0, \\ \ddot{y}_1 - l_1 \ddot{\alpha}_1 \cos(\alpha_1) + l_1 \dot{\alpha}_1^2 \sin(\alpha_1) = 0, \\ \ddot{x}_1 + l_1 \ddot{\alpha}_2 \cos(\alpha_1) - l_1 \dot{\alpha}_2^2 \sin(\alpha_1) = \ddot{x}_2 - l_2 \ddot{\alpha}_2 \cos(\alpha_2) + l_2 \dot{\alpha}_2^2 \sin(\alpha_2), \\ \ddot{y}_1 + l_1 \ddot{\alpha}_2 \sin(\alpha_1) + l_1 \dot{\alpha}_2^2 \cos(\alpha_1) = \ddot{y}_2 - l_2 \ddot{\alpha}_2 \sin(\alpha_2) - l_2 \dot{\alpha}_2^2 \cos(\alpha_2) \end{array} \right. \quad (2.3)$$

Для каждого плоского шарнира необходимо записать два уравнения связи. Итого рассматриваемая система будет иметь четыре уравнения связи на 2 шарнира. Эти уравнения связи необходимо добавить к шести урав-

нениям движения для совместного решения.

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 \ddot{x}_1 = F_{1x} - R_{10x} + R_{12x}, \\ m_1 \ddot{y}_1 = F_{1y} - R_{10y} + R_{12y}, \\ J_{1z} \ddot{\alpha}_1 = F_{1y} + l_1 (R_{10x} \cos \alpha_1 + R_{10y} \sin \alpha_1 + R_{12x} \cos \alpha_1 + R_{12y} \sin \alpha_1), \\ m_2 \ddot{x}_2 = F_{2x} - R_{21x}, \\ m_2 \ddot{y}_2 = F_{2y} - R_{21y}, \\ J_{2z} \ddot{\alpha}_2 = F_{1y} - R_{12x} l_2 \sin \alpha_1 - R_{12y} l_2 \sin \alpha_1, \\ \ddot{x}_1 - l_1 \ddot{\alpha}_1 \sin(\alpha_1) - l_1 \dot{\alpha}_1^2 \cos(\alpha_1) = 0, \\ \ddot{y}_1 - l_1 \ddot{\alpha}_1 \cos(\alpha_1) + l_1 \dot{\alpha}_1^2 \sin(\alpha_1) = 0, \\ \ddot{x}_1 + l_1 \ddot{\alpha}_2 \cos(\alpha_1) - l_1 \dot{\alpha}_2^2 \sin(\alpha_1) = x_2 - l_2 \ddot{\alpha}_2 \cos(\alpha_2) + l_2 \dot{\alpha}_2^2 \sin(\alpha_2), \\ \ddot{y}_1 + l_1 \ddot{\alpha}_2 \sin(\alpha_1) + l_1 \dot{\alpha}_2^2 \cos(\alpha_1) = y_2 - l_2 \ddot{\alpha}_2 \sin(\alpha_2) - l_2 \dot{\alpha}_2^2 \cos(\alpha_2) \end{array} \right. \quad (2.4)$$

Подобным образом можно получить уравнения движения системы приведенной на рисунке 2.1. Для системы раскрытия створок панелей солнечных батарей необходимо записать 12 уравнений движения и 10 уравнений связи - по два на каждый цилиндрический шарнир. Для вывода уравнений связи необходимо производить дифференцирование уравнений связи, которые уникальны для каждой системы и зависят от вида соединения тел.

Уравнения движения (2.4) представляют собой систему дифференциальных и алгебраических уравнений, поскольку содержит как дифференциальные, так и алгебраические уравнения.

## 2.2 Уравнения движения свободного тела

Конфигурация систем твердых тел может задаваться большим числом обобщенных координат. Чтобы избежать громоздких преобразований при построении математической модели систем целесообразно использовать матричную запись уравнений. Уравнение движения центра масс свободного тела в декартовых запишется в виде:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}, \quad (2.5)$$

где  $\ddot{\mathbf{r}} = \{\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}\}^T$  - матрица-столбец ускорения центра масс тела;  $\mathbf{F} = \{F_x, F_y, F_z\}^T$  - координатный столбец главного вектора внешних сил, в системе координат относительно которой рассматривается движение тела;  $\mathbf{M}$  - диагональная матрица масс:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

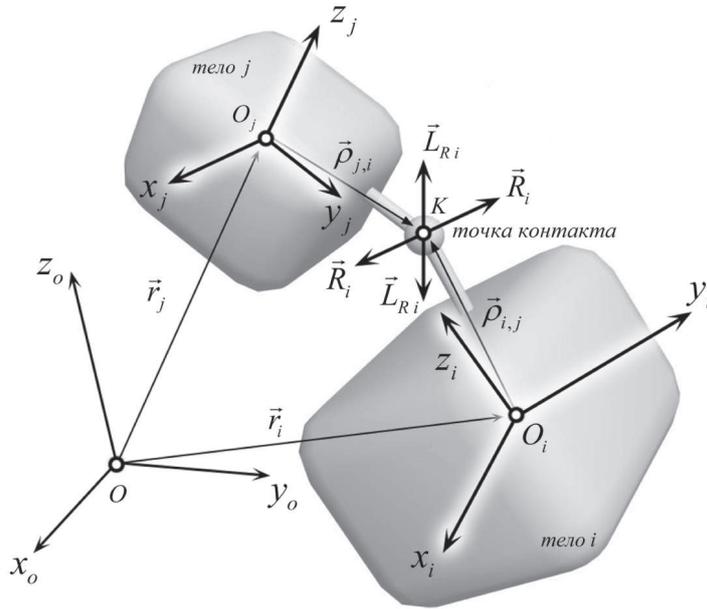


Рис. 2.4: К записи уравнений движения

Уравнение движения тела относительно центра масс - динамические уравнения Эйлера, в векторной форме имеет следующий вид:

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{L} - \tilde{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}, \quad (2.7)$$

$\mathbf{J}$  - тензор инерции твердого тела:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{pmatrix}; \quad (2.8)$$

$\boldsymbol{\omega} = \{\omega_x, \omega_y, \omega_z\}^T$  - координатный столбец вектора угловой скорости тела, в связанной системе координат;  $\mathbf{L} = \{L_x, L_y, L_z\}^T$  - координатный столбец главного вектора момента внешних сил в проекциях на оси связанной системы координат. Объединяя уравнения (2.5) и (2.7) получим матричные уравнения движения свободного твердого тела:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ 0 & \mathbf{J} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{L} \end{pmatrix} - \boldsymbol{\omega}; \quad (2.9)$$

### 2.3 Уравнения связи «точка-плоскость»

Шарнир, соединяющий два смежных тела, может ограничивать их относительное поступательное и вращательное движение. В общем случае в шарнире возникает произвольно направленные векторы реакции и момента. Определим уравнения элементарной связи «точка-плоскость», которая ограничивает относительное поступательное движение двух тел таким образом, что определенная точка одного тела вынуждена находиться на плоскости, жестко связанной с другим телом. Это уравнение связи приводит к возникновению в точке контакта силы реакции перпендикулярной плоскости, в которой разрешено движение заданной точки тела. Эта связь уменьшает на единицу число степеней свободы системы двух связанных тел. Задав нескольких связей «точка-плоскость» возможно определение связи «точка-прямая» (минус 2 степени свободы) и «точка-точка» (минус 3 степени свободы). Данные типы соединений часто встречаются в механических системах РКТ. Связь «точка-точка» описывает сферический шарнир, а связь «точка-прямая» совместно с уравнениями связи, ограничивающими относительное вращение двух тел, может описывать движение одного тела относительно другого по некоторой направляющей.

Широко распространенными типами соединений тел в механических системах ракетно-космической технике и в технике вообще являются соединения типа цилиндрический шарнир, сферический шарнир, также взаимодействие тел может происходить путем скольжение одного тела по поверхности или некоторой направляющей, связанной с другим телом. Во всех этих случаях можно предположить, что взаимодействие тел механической системы будет определяться силой и моментом, приложенными в одной или нескольких точках контакта, что будет ограничивать относительное перемещение и относительное вращение двух тел. Даже если контакт тел происходит по поверхности, можно допустить, что силы реакции, распределенные по поверхности приводятся к одному вектору силы реакции и вектору реактивного момента. Рассмотрим процедуру получения матричных уравнений движения некоторых типов соединений тел.

Шарнир, соединяющий два смежных тела ограничивает относительное вращение или перемещение этих тел. Будем рассматривать два простейших типа уравнений связи, при помощи которых можно моделировать указанные выше и более сложные соединения тел. Предполагаем, что траектория точки контакта или шарнирной точки может быть ограничена плоскостью, линией или точкой связанной с другим телом. Другими словами, траектория шарнирной точки в системе координат, свя-

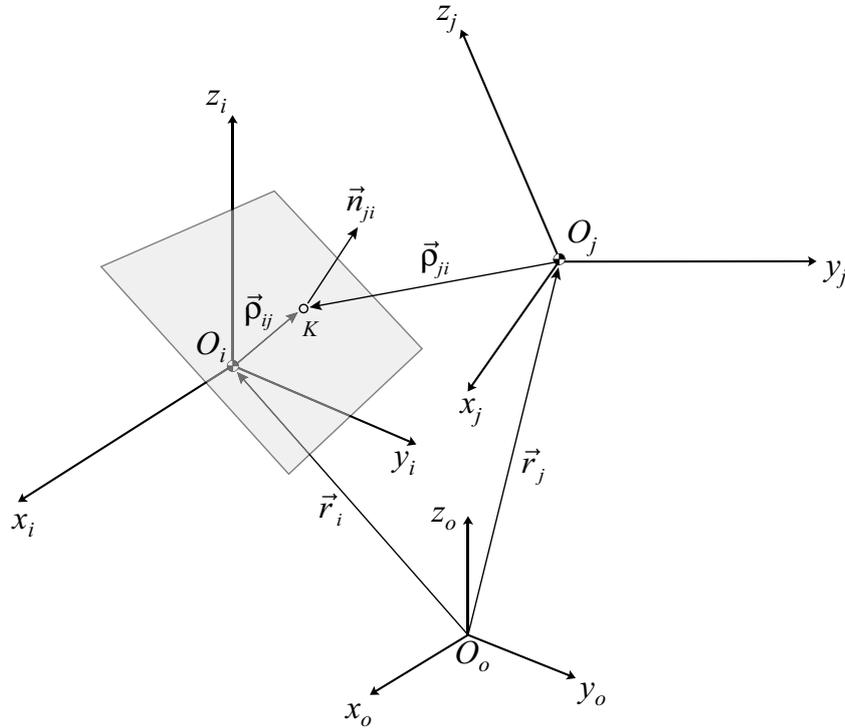


Рис. 2.5: К записи уравнения связи «точка-плоскость»

званной с одним из тел будет представлять собой плоскую кривую, прямую или точку. Последнее означает совпадение двух точек взаимодействующих тел. Связи записываются в форме строгого ограничения на проекции относительного линейного и углового ускорения двух тел на заданное направление, определяемое вектором  $\vec{n}_{ij}$ , который связан с системой координат одного из двух тел. Уравнения связи на ускорения позволят сразу получить ДАУ индекса 1, для дальнейшего численного интегрирования. Первый тип связи записывается в виде скалярного произведения двух векторов и имеет следующий вид:

$$\vec{n}_i \cdot \vec{w}_{ij}^r = 0 \quad (2.10)$$

где  $\vec{w}_{ij}^r$  – относительное точки контакта относительно системы координат связанной с одним из взаимодействующих тел;  $\vec{n}_i$  – вектор нормали, вдоль которого ограничено движение точки контакта. Приведем уравнения связи к матричной форме. Матричная запись уравнения связи 2.10 будет иметь следующий вид:

$$(\ddot{\rho}_{ij}^{(i)})^T \mathbf{n}_{ij}^{(i)} = 0. \quad (2.11)$$

где  $\ddot{\rho}$  - координатный столбец ускорения точки контакта в связанной системе координат тела  $i$ . Здесь и далее верхний индекс в скобках обозначает индекс системы координат в которой записывается координатный столбец соответствующего вектора. Выразим производную координатного столбца  $\rho_{ij}^{(i)}$  через кинематические параметры центров масс взаимодействующих тел. Для этого, учитывая правило преобразования координат, выразим  $\rho_{ij}^{(i)}$  через его проекции на оси системы координат  $O_0x_0y_0z_0$ :

$$\rho_{ij}^{(i)} = \mathbf{A}^{iT} \rho_{ij}^{(0)} \quad (2.12)$$

где  $\mathbf{A}^i$  - матрица преобразования координат из системы  $O_ix_iy_iz_i$  в систему  $O_0x_0y_0z_0$ . Продифференцируем выражение (2.12), получим:

$$\dot{\rho}_{ij}^{(i)} = \dot{\mathbf{A}}^{iT} \rho_{ij}^{(0)} + \mathbf{A}^{iT} \dot{\rho}_{ij}^{(0)} \quad (2.13)$$

Учитывая правило дифференцирования матрицы перехода:

$$\dot{\mathbf{A}}_i^{rT} = -\tilde{\omega}_i^{(i)} \mathbf{A}_i^{rT},$$

получим выражение скорости:

$$\dot{\rho}_{ij}^{(i)} = -\tilde{\omega}_i^{(i)} \mathbf{A}^{iT} \rho_{ij}^{(0)} + \mathbf{A}^{iT} \dot{\rho}_{ij}^{(0)} \quad (2.14)$$

Выражение (2.14) представляет собой матричную запись локальной производной вектора  $\vec{\rho}_{ij}$ , действительно, локальная производная вектора в векторной форме, вне связи с конкретными системами координат имеет следующий вид:

$$\frac{d\vec{\rho}_{ij}}{dt} = \frac{d\vec{\rho}_{ij}}{dt} - \tilde{\omega}_i \times \vec{\rho}_{ij}$$

Радиус-вектор точки контакта  $\vec{\rho}_{ij}$  в векторной форме выражается через радиус-векторы центров масс двух взаимодействующих тел и радиус-вектор точки контакта  $\vec{\rho}_{ji}$  из четырехугольника рис.  $O_0O_iKO_j$ , рис. 2.5:

$$\vec{\rho}_{ij} = \vec{\rho}_{ji} + \vec{r}_j - \vec{r}_i.$$

В матричной координатной форме это уравнение имеет следующий вид:

$$\rho_{ij}^{(0)} = \mathbf{A}^j \rho_{ji}^{(j)} + \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i \quad (2.15)$$

Учитывая выражение (2.15) и принятое допущение о том, что вектор  $\rho_{ji}Y^{(j)}$  остается постоянным относительно системы координат  $O_jx_jy_jz_j$ , скорость точки контакта определяется следующим образом:

$$\dot{\rho}_{ij}^{(0)} = \frac{d}{dt} \left( \mathbf{A}^j \rho_{ji}^{(j)} + \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i \right) = \mathbf{A}^j \tilde{\omega}_j^{(j)} \rho_{ji}^{(j)} + \dot{\mathbf{r}}_j - \dot{\mathbf{r}}_i. \quad (2.16)$$

Продифференцируем выражение (2.14) и получим связь между ускорениями точки контакта в разных системах координат:

$$\ddot{\rho}_{ij}^{(i)} = -\dot{\tilde{\omega}}_i^{(i)} \mathbf{A}^{iT} \rho_{ij}^{(0)} - \tilde{\omega}_i^{(i)} \dot{\mathbf{A}}^{iT} \rho_{ij}^{(0)} - \tilde{\omega}_i^{(i)} \mathbf{A}^{iT} \dot{\rho}_{ij}^{(0)} + \dot{\mathbf{A}}^{iT} \dot{\rho}_{ij}^{(0)} + \mathbf{A}^{iT} \ddot{\rho}_{ij}^{(0)}. \quad (2.17)$$

Подставив выражения для производных матриц преобразования координат, получим:

$$\begin{aligned} \ddot{\rho}_{ij}^{(i)} = & -\dot{\tilde{\omega}}_i^{(i)} \mathbf{A}^{iT} \rho_{ij}^{(0)} + \tilde{\omega}_i^{(i)} \tilde{\omega}_i^{(i)} \mathbf{A}_i^{rT} \rho_{ij}^{(0)} - \\ & - \tilde{\omega}_i^{(i)} \mathbf{A}^{iT} \dot{\rho}_{ij}^{(0)} - \tilde{\omega}_i^{(i)} \mathbf{A}_i^{rT} \dot{\rho}_{ij}^{(0)} + \mathbf{A}^{iT} \ddot{\rho}_{ij}^{(0)}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

где, с учетом постоянства положения точки контакта в системе координат  $O_j x_j y_j z_j$ ,  $\dot{\rho}_{ji}^{(j)} = 0$ :

$$\ddot{\rho}_{ij} = \dot{\mathbf{A}}^j \tilde{\omega}_j \rho_{ji}^{(j)} + \mathbf{A}^j \dot{\tilde{\omega}}_j \rho_{ji}^{(j)} + \ddot{\mathbf{r}}_j - \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{A}^j \tilde{\omega}_j \tilde{\omega}_j \rho_{ji}^{(j)} + \mathbf{A}^j \dot{\tilde{\omega}}_j \rho_{ji}^{(j)} + \ddot{\mathbf{r}}_j - \ddot{\mathbf{r}}_i. \quad (2.19)$$

Подставим (2.19) в (2.18):

$$\begin{aligned} \ddot{\rho}_{ij}^{(i)} = & -\dot{\tilde{\omega}}_i \rho_{ij}^{(i)} + \tilde{\omega}_i \tilde{\omega}_i \rho_{ij}^{(i)} - \tilde{\omega}_i \mathbf{A}^{iT} \dot{\rho}_{ij} - \tilde{\omega}_i \mathbf{A}_i^{rT} \dot{\rho}_{ij} + \\ & + \mathbf{A}^{iT} (\mathbf{A}^j \tilde{\omega}_j \tilde{\omega}_j \rho_{ji}^{(j)} + \mathbf{A}^j \dot{\tilde{\omega}}_j \rho_{ji}^{(j)} + \ddot{\mathbf{r}}_j - \ddot{\mathbf{r}}_i). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Перепишем последнее выражения, выделив матрицы коэффициентов при линейных и угловых ускорениях:

$$\begin{aligned} \ddot{\rho}_{ij}^{(i)} = & \tilde{\rho}_{ij}^{(i)} \dot{\omega}_i - \mathbf{A}^{iT} \mathbf{A}^j \tilde{\rho}_{ji}^{(j)} \dot{\omega}_j + \mathbf{A}^{iT} \ddot{\mathbf{r}}_j - \mathbf{A}^{iT} \ddot{\mathbf{r}}_i + \\ & + \tilde{\omega}_i \tilde{\omega}_i \mathbf{A}_i^{rT} \rho_{ij} - \tilde{\omega}_i \mathbf{A}^{iT} \dot{\rho}_{ij} - \tilde{\omega}_i \mathbf{A}_i^{rT} \dot{\rho}_{ij} + \mathbf{A}^{iT} \mathbf{A}^j \tilde{\omega}_j \tilde{\omega}_j \rho_{ji}^{(j)} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Поставив (2.21) в (2.11), получим уравнение связи "точка-плоскость":

$$\mathbf{Q}_i \ddot{\mathbf{X}}_i + \mathbf{Q}_j \ddot{\mathbf{X}}_j = \mathbf{b}_{ij}, \quad (2.22)$$

где  $\mathbf{Q}_i, \mathbf{Q}_j$  - блочные матрицы:

$$\mathbf{Q}_i = \begin{pmatrix} -\mathbf{n}_{ij}^{(i)T} \mathbf{A}^{iT} & \mathbf{n}_{ij}^{(i)T} \tilde{\rho}_{ij}^{(i)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{n}_{ij}^{(i)T} \mathbf{A}^{iT} & -\mathbf{n}_{ij}^{(i)T} \mathbf{A}^{iT} \mathbf{A}^j \tilde{\rho}_{ji}^{(j)} \end{pmatrix},$$

$\ddot{\mathbf{X}}_i, \ddot{\mathbf{X}}_j$  - матрицы линейных и угловых ускорений тел:

$$\ddot{\mathbf{X}}_i = \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{r}}_i \\ \dot{\omega}_i \end{pmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{X}}_j = \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{r}}_j \\ \dot{\omega}_j \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{b}_{ij} = \mathbf{n}_{ij}^{(i)T} \left( \tilde{\omega}_i \mathbf{A}^{iT} \dot{\rho}_{ij} - \tilde{\omega}_i \tilde{\omega}_i \mathbf{A}_i^{rT} \rho_{ij} + \tilde{\omega}_i \mathbf{A}_i^{rT} \dot{\rho}_{ij} - \mathbf{A}^{iT} \mathbf{A}^j \tilde{\omega}_j \tilde{\omega}_j \rho_{ji}^{(j)} \right).$$

Уравнение (2.28) представляет собой скалярное линейное уравнение, связывающее ускорения двух смежных тел. Это уравнение необходимо добавить к уравнениям движения для совместного решения. В правую часть уравнений движения необходимо добавить силы реакции, определим эти силы. Для идеальной связи «точка-плоскость» сила реакции действует перпендикулярно плоскости, по которой двигается точка контакта. Примем за направление действия силы реакции, действующей на тело  $j$ , направление вектора  $\vec{n}_{ij}$ . На тело  $i$  будет действовать сила с противоположным направлением:

$$\mathbf{R}_j = -\mathbf{R}_i = \mathbf{A}^i \mathbf{n}_{ij}^{(i)} \lambda, \quad (2.23)$$

где  $\lambda$  - неизвестный множитель Лагранжа. Сила реакции создает момент относительно центра масс, который будет определяться следующим образом:

$$\mathbf{L}_{R_j}^{(j)} = \tilde{\rho}_{ji}^{(j)} \mathbf{A}^{jT} \mathbf{A}^i \mathbf{n}_{ij}^{(i)} \lambda. \quad (2.24)$$

Последнее выражение представляет собой матричную запись векторного произведения  $\rho_{ij} \times R_j$ . Момент определен в проекциях на оси связанной системы координат. Момент от силы реакции, действующий на тело  $i$  определяется подобным образом:

$$\mathbf{L}_{R_i}^{(i)} = -\tilde{\rho}_{ij}^{(i)} \mathbf{n}_{ij}^{(i)} \lambda. \quad (2.25)$$

Сравнивая (2.23), (2.24), (2.25) с матрицами коэффициентов  $\mathbf{Q}_i$  и  $\mathbf{Q}_j$  выражения для сил реакций и моментов можно переписать в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R}_j \\ \mathbf{L}_{R_j}^{(j)} \end{pmatrix} = \mathbf{Q}_j^T \lambda, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{R}_i \\ \mathbf{L}_{R_i}^{(i)} \end{pmatrix} = \mathbf{Q}_i^T \lambda. \quad (2.26)$$

Если одну из двух смежных тел совершает заданное движение, что форма уравнений связи не меняется. В частном случае, когда тело  $i$  неподвижно и с этим телом связана неподвижная система координат, матрицы уравнений связи имеют следующий вид:

$$\mathbf{Q}_i = \begin{pmatrix} -\mathbf{n}_{ij}^{(i)T} & \mathbf{n}_{ij}^{(i)T} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{n}_{ij}^{(i)T} & -\mathbf{n}_{ij}^{(i)T} \mathbf{A}^j \tilde{\rho}_{ji}^{(j)} \end{pmatrix},$$

## 2.4 Уравнения связи ограничивающее относительное вращение двух тел

Перейдем к рассмотрению уравнения связи второго типа, которое ограничивает относительное вращение двух тел так, что угловое ускорение тела  $j$  относительно тела  $i$  в проекции на направление  $\vec{n}_{ij}$  должна

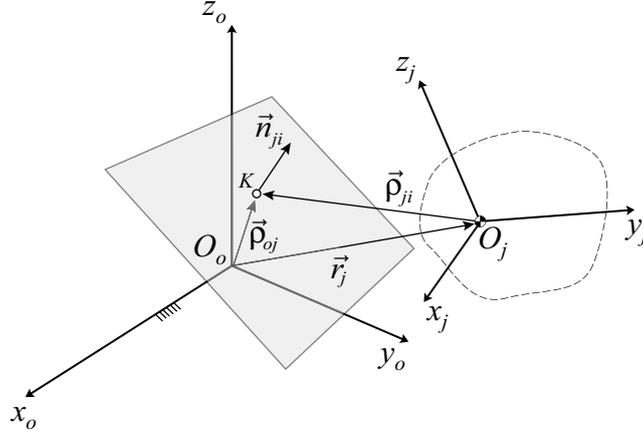


Рис. 2.6: Связь «точка-плоскость» для неподвижного тела

быть равна нулю:

$$\left( \varepsilon_{ji}^{(i)} \right)^T \mathbf{n}_{ij}^{(i)} = 0,$$

Относительное ускорение определяется следующим образом:

$$\varepsilon_{ji}^{(i)} = \dot{\omega}_{ij}^{(i)} = \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j^{-1} \omega_j^{(j)} - \omega_i^{(i)}$$

Подставив последнее выражение в уравнение связи, получим:

$$\left( \mathbf{A}^j \mathbf{A}^{iT} \mathbf{n}_{ij}^{(i)} \right)^T \varepsilon_j^{(j)} - \left( \mathbf{n}_{ij}^{(i)} \right)^T \varepsilon_i^{(i)} - \tilde{\omega}_i^{(i)} \mathbf{A}^i \mathbf{A}^{jT} \omega_j^{(j)} \mathbf{n}_{ij}^{(i)} = 0 \quad (2.27)$$

Уравнение (2.27) можно привести к виду:

$$\mathbf{Q}_i \ddot{\mathbf{X}}_i + \mathbf{Q}_j \ddot{\mathbf{X}}_j = b_{ij}, \quad (2.28)$$

где матрицы коэффициентов при ускорениях определяются следующим образом:

$$\mathbf{Q}_i = \left( \mathbf{0} \quad \left( \mathbf{A}^j \mathbf{A}^{iT} \mathbf{n}_{ij}^{(i)} \right)^T \right), \quad \mathbf{Q}_j = \left( \mathbf{0} \quad - \left( \mathbf{n}_{ij}^{(i)} \right)^T \right), \quad (2.29)$$

скалярный член  $b_{ij}$  определяется следующим образом:

$$b_{ij} = \tilde{\omega}_i^{(i)} \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j^{iT} \omega_j^{(j)} \mathbf{n}_{ij}^{(i)}$$

При существовании связи, ограничивающей относительное вращение, двух тел на тела действует реактивный момент. На тело  $i$  действует момент :

$$\mathbf{L}_i = -\mathbf{n}_{ij}^{(i)} \lambda \quad (2.30)$$

на тело  $j$ :

$$\mathbf{L}_j = \mathbf{A}^{jT} \mathbf{A}_i \mathbf{n}_{ij}^{(i)} \lambda \quad (2.31)$$

## 2.5 Уравнения связи для плоских механических систем

Запишем полученные уравнения связи для плоских механических систем. Положение тела  $i$  - плоской фигуры, задается тремя параметрами - положением центра масс:

$$\mathbf{r}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$$

и углом поворота  $\phi$ , эти параметры можно объединить в координатный столбец:

$$\mathbf{X}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ \phi_i \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что связь, ограничивающая относительное вращение тел  $i$  и  $j$ , будет иметь простейший вид:

$$\phi_i - \phi_j = 0. \quad (2.32)$$

Рассмотрим уравнение «точка-линия», рис. 2.7. Связь «точка-линия» предписывает некоторой точке, связанной с телом  $j$  двигаться вдоль прямой, жестко связанной с телом  $i$ . Сама прямая в теле  $i$  задана при помощи нормального вектора  $\vec{n}_{ik}$  и точки на этой прямой, определяемой  $\vec{p}_{ik}$ . Положение точки контакта  $\vec{\rho}_{ik}$  в системе координат, связанной с телом  $i$

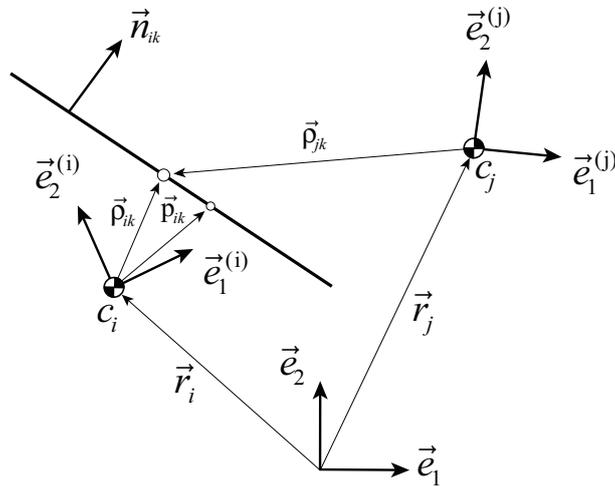


Рис. 2.7: К уравнению связи «точка-линия»

должно удовлетворять уравнению прямой:

$$\vec{p}_{ik} - \vec{\rho}_{ik} \cdot \vec{n}_k = 0. \quad (2.33)$$

В матричной координатной форме уравнение связи будет иметь вид:

$$\mathbf{n}_k^{(i)T} (\mathbf{p}_{ik}^{(i)} - \rho_{ik}^{(i)}) = 0. \quad (2.34)$$

Для понижения индекса ДАУ дважды продифференцируем уравнение (2.34), что приведет к следующему матричному уравнению:

$$\mathbf{n}_k^{(i)T} \ddot{\rho}_{ik}^{(i)} = 0. \quad (2.35)$$

Из уравнения (2.35) следует, что ускорение точки контакта относительно системы координат связанной с телом  $i$  должно быть направлено вдоль прямой, заданной вектором  $\mathbf{n}_k^{(i)}$ . Как было отмечено ранее, полученное уравнение связи никак не ограничивает положение и скорость точки контакта, поэтому для сохранения принадлежности точки контакта заданной прямой и сохранения направления скорости вдоль этой прямой, начальные условия системы дифференциальных уравнений должны удовлетворять дополнительным условиям:

$$\begin{cases} \mathbf{n}_k^{(i)T} (\mathbf{p}_{ik}^{(i)} - \rho_{ik_0}^{(i)}) = 0, \\ \mathbf{n}_k^{(i)T} \dot{\rho}_{ik_0}^{(i)} = 0, \end{cases} \quad (2.36)$$

где  $\rho_{ik_0}^{(i)}$ ,  $\dot{\rho}_{ik_0}^{(i)}$  - положение и скорость точки контакта в начальный момент времени. Определим скорость  $\dot{\rho}_{ik}^{(i)}$  и ускорение точки контакта  $\ddot{\rho}_{ik}^{(i)}$ :

$$\dot{\rho}_{ik}^{(i)} = \dot{\mathbf{A}}^{iT} \rho_{ik} + \mathbf{A}^{iT} \dot{\rho}_{ik}, \quad (2.37)$$

Матрицы преобразования координат для плоских систем имеют простой вид:

$$\mathbf{A}^i = \begin{pmatrix} \cos \phi_i & -\sin \phi_i \\ \sin \phi_i & \cos \phi_i \end{pmatrix},$$

поэтому производная матрицы преобразования координат записывается следующим образом:

$$\dot{\mathbf{A}}^i = \begin{pmatrix} -\sin \phi_i & -\cos \phi_i \\ \cos \phi_i & -\sin \phi_i \end{pmatrix} \dot{\phi}_i = \dot{\phi}_i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{A}^i = \dot{\phi}_i \boldsymbol{\Omega} \mathbf{A}^i.$$

Производная обратной матрицы:

$$\dot{\mathbf{A}}^{iT} = \dot{\phi}_i (\boldsymbol{\Omega} \mathbf{A}^i)^T = \dot{\phi}_i \mathbf{A}^{iT} \boldsymbol{\Omega}^T.$$

Тогда скорость точки контакта запишем следующим образом:

$$\dot{\rho}_{ik}^{(i)} = \dot{\phi}_i \mathbf{A}^{iT} \boldsymbol{\Omega}^T \rho_{ik} + \mathbf{A}^{iT} \dot{\rho}_{ik}, \quad (2.38)$$

где скорость точки контакта в проекциях на оси инерциальной системы координат:

$$\dot{\rho}_{ik} = -\dot{\mathbf{r}}_i + \dot{\mathbf{r}}_j + \dot{\phi}_j \mathbf{\Omega} \mathbf{A}^j \rho_{jk}^{(j)}. \quad (2.39)$$

Далее определим ускорение точки контакта:

$$\ddot{\rho}_{ik}^{(i)} = \ddot{\phi}_i \mathbf{A}^{iT} \mathbf{\Omega}^T \rho_{ik} + \dot{\phi}_i \dot{\mathbf{A}}^{iT} \mathbf{\Omega}^T \rho_{ik} + \dot{\phi}_i \mathbf{A}^{iT} \mathbf{\Omega}^T \dot{\rho}_{ik} + \dot{\mathbf{A}}^{iT} \dot{\rho}_{ik} + \mathbf{A}^{iT} \ddot{\rho}_{ik}.$$

Ускорение точки контакта в проекциях на оси инерциальной системы координат определим продифференцировав (2.39):

$$\ddot{\rho}_{ik} = -\ddot{\mathbf{r}}_i + \ddot{\mathbf{r}}_j + \ddot{\phi}_j \mathbf{\Omega} \mathbf{A}^j \rho_{jk}^{(j)} + \dot{\phi}_j \mathbf{\Omega} \dot{\mathbf{A}}^j \rho_{jk}^{(j)} + \dot{\phi}_j \mathbf{\Omega} \mathbf{A}^j \dot{\rho}_{jk}^{(j)}. \quad (2.40)$$

Подставив в последнее выражение значение производных матрицы  $\mathbf{A}^j$  и с учетом того, что  $\rho_{jk}^{(j)} = const$  получим :

$$\ddot{\rho}_{ik} = -\ddot{\mathbf{r}}_i + \ddot{\mathbf{r}}_j + \ddot{\phi}_j \mathbf{\Omega} \mathbf{A}^j \rho_{jk}^{(j)} + \dot{\phi}_j \mathbf{\Omega} \dot{\phi}_j \mathbf{\Omega} \mathbf{A}^j \rho_{jk}^{(j)}. \quad (2.41)$$

Подставим (2.41) в выражение для  $\ddot{\rho}_{ik}^{(i)}$  получим:

$$\begin{aligned} \ddot{\rho}_{ik}^{(i)} = & \ddot{\phi}_i \mathbf{A}^{iT} \mathbf{\Omega}^T \rho_{ik} + \dot{\phi}_i^2 \mathbf{A}^{iT} \mathbf{\Omega}^T \mathbf{\Omega}^T \rho_{ik} + 2\dot{\phi}_i \dot{\mathbf{A}}^{iT} \mathbf{\Omega}^T \dot{\rho}_{ik} + \\ & + \mathbf{A}^{iT} (-\ddot{\mathbf{r}}_i + \ddot{\mathbf{r}}_j + \ddot{\phi}_j \mathbf{\Omega} \mathbf{A}^j \rho_{jk}^{(j)} + \dot{\phi}_j^2 \mathbf{\Omega} \mathbf{\Omega} \mathbf{A}^j \rho_{jk}^{(j)}). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Квадрат матрицы  $\mathbf{\Omega}$  равен единичной матрице со знаком минус. С учетом этого уравнение связи «точка-линия» будет иметь вид:

$$\mathbf{Q}_i \ddot{\mathbf{X}}_i + \mathbf{Q}_j \ddot{\mathbf{X}}_j = b_{ij} \quad (2.43)$$

где матрицы коэффициентов при ускорениях и скаляр  $b_{ij}$  определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_i &= \begin{pmatrix} -\mathbf{n}_k^{(i)T} \mathbf{A}^{iT} & \mathbf{n}_k^{(i)T} \mathbf{A}^{iT} \mathbf{\Omega}^T \rho_{ik} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{Q}_j &= \begin{pmatrix} \mathbf{n}_k^{(i)T} \mathbf{A}^{iT} & \mathbf{n}_k^{(i)T} \mathbf{A}^{iT} \mathbf{\Omega} \mathbf{A}^j \rho_{jk}^{(j)} \end{pmatrix}, \\ b_{ij} &= \mathbf{n}_k^{(i)T} \left( \dot{\phi}_i^2 \mathbf{A}^{iT} \rho_{ik} - 2\dot{\phi}_i \dot{\mathbf{A}}^{iT} \mathbf{\Omega}^T \dot{\rho}_{ik} + \mathbf{A}^{iT} \dot{\phi}_j^2 \mathbf{A}^j \rho_{jk}^{(j)} \right). \end{aligned}$$

## 2.6 Примеры

### 2.6.1 Уравнения связи сферического шарнира и цилиндрического шарниров

Запишем уравнения связи сферического шарнира. Два тела, соединенных сферическим шарниром имеют общую точку - центр сферического шарнира, на угловую скорость двух смежных тел не накладываеся

никаких ограничений. Два свободных тела, соединенных сферическим шарниром будут иметь 9 степеней свободы, следовательно для сферического шарнира необходимо записать три уравнения связи. Общая точка смежных тел - точка контакта, которая является центром шарнира, определяется пересечением трех не параллельных плоскостей, поэтому сферический шарнир можно описать задать тремя уравнениями "точка-плоскость" вида (2.28). Три уравнения связи друг от друга будут отличаться только векторами нормали к плоскости контакта:

$$\mathbf{Q}_{ik}\ddot{\mathbf{X}}_i + \mathbf{Q}_{jk}\ddot{\mathbf{X}}_j = \mathbf{b}_k, \quad k = 1, \dots, 3, \quad (2.44)$$

где матрицы коэффициентов при ускорениях определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{ik} &= \begin{pmatrix} -\mathbf{n}_k^{(i)T} \mathbf{A}^{iT} & \mathbf{n}_k^{(i)T} \tilde{\rho}_{ij}^{(i)} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{Q}_{jk} &= \begin{pmatrix} \mathbf{n}_k^{(i)T} \mathbf{A}^{iT} & -\mathbf{n}_k^{(i)T} \mathbf{A}^{iT} \mathbf{A}^j \tilde{\rho}_{ji}^{(j)} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad k = 1, \dots, 3,$$

где  $\mathbf{n}_k^{(i)T}$ ,  $k = 1, \dots, 3$  - координатные столбцы векторов нормали жестко связанные с системой координат  $O_i x_i y_i z_i$ . Матрицы  $\mathbf{b}_k$  в каждом уравнении также отличаются только векторами нормали:

$$\mathbf{b}_k = \mathbf{n}_k^{(i)T} \left( 2\tilde{\omega}_i \mathbf{A}^{iT} \dot{\rho}_{ij} - \tilde{\omega}_i \tilde{\omega}_i \mathbf{A}_i^{rT} \rho_{ij} - \mathbf{A}^{iT} \mathbf{A}^j \tilde{\omega}_j \tilde{\omega}_j \rho_{ji}^{(j)} \right), \quad k = 1, \dots, 3.$$

Таким образом, уравнения движения двух тел соединенных сферическим шарниром будут иметь следующий вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{M}_i & 0 \\ 0 & \mathbf{J}_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{r}}_i \\ \dot{\omega}_i \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{F}_i \\ \mathbf{L}_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\omega}_i \mathbf{J}_i \omega_i \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^3 \mathbf{Q}_{ik}^T \lambda_k, \\ \begin{pmatrix} \mathbf{M}_j & 0 \\ 0 & \mathbf{J}_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{r}}_j \\ \dot{\omega}_j \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{F}_j \\ \mathbf{L}_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\omega}_j \mathbf{J}_j \omega_j \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^3 \mathbf{Q}_{jk}^T \lambda_k, \\ \mathbf{Q}_{i1} + \mathbf{Q}_{j1} &= \mathbf{b}_1, \\ \mathbf{Q}_{i2} + \mathbf{Q}_{j2} &= \mathbf{b}_2, \\ \mathbf{Q}_{i3} + \mathbf{Q}_{j3} &= \mathbf{b}_3. \end{aligned} \right. \quad (2.45)$$

Запишем уравнение связи для цилиндрического шарнира. Два тела, соединенные цилиндрическим шарниром имеют друг относительно друга одну степень свободы: одно может вращаться вокруг неподвижной оси другого тела, см. рисунок 2.8. Очевидно, что уравнений связи должно быть ровно пять, поскольку два свободных тела имеют двенадцать степеней свободы, а после соединения их цилиндрическим шарниром степеней

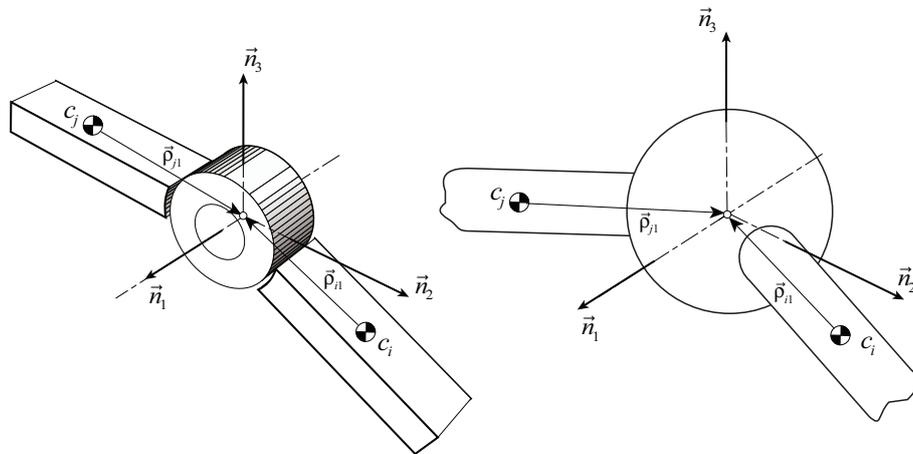


Рис. 2.8: Цилиндрический и сферический шарниры.

свободы должно остаться семь: шесть степеней свободы твердого тела и одна степень свободы - относительное вращение двух тел. Цилиндрический шарнир можно построить из сферического шарнира если к силам реакции добавить два дополнительных момента реакции запрещающих вращение вокруг двух осей, перпендикулярных оси вращения шарнира. В соответствии с рисунком 2.8 дополнительные векторы моментов реакции должны быть направлены вдоль осей  $\vec{n}_3^{(i)}$  и  $\vec{n}_2^{(i)}$ , которые ортогональны оси шарнира, определяемой вектором  $\vec{n}_1^{(i)}$ . Следовательно, цилиндрический шарнир определяется при помощи трех уравнений связи "точка-плоскость", три плоскости задаются тремя векторами  $\vec{n}_1^{(i)}$ ,  $\vec{n}_2^{(i)}$ ,  $\vec{n}_3^{(i)}$  и двух уравнений связи, ограничивающих относительное вращение двух тел вокруг осей, определяемых векторами  $\vec{n}_3^{(i)}$  и  $\vec{n}_2^{(i)}$ . К системе уравнений (2.45) необходимо добавить два дополнительных уравнения связи, а в правую часть уравнений движения необходимо добавить дополнительные моменты реакции, после чего система уравнений движения примет

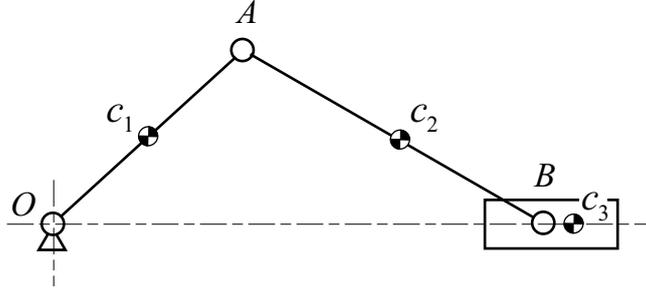


Рис. 2.9: Кривошипно-ползунный механизм

следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \mathbf{M}_i & 0 \\ 0 & \mathbf{J}_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{r}}_i \\ \dot{\omega}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_i \\ \mathbf{L}_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\omega}_i \mathbf{J}_i \omega_i \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^5 \mathbf{Q}_{ik}^T \lambda_k, \\ \begin{pmatrix} \mathbf{M}_j & 0 \\ 0 & \mathbf{J}_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{r}}_j \\ \dot{\omega}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_j \\ \mathbf{L}_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\omega}_j \mathbf{J}_j \omega_j \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^5 \mathbf{Q}_{jk}^T \lambda_k, \\ \mathbf{Q}_{i1} + \mathbf{Q}_{j1} = \mathbf{b}_1, \\ \mathbf{Q}_{i2} + \mathbf{Q}_{j2} = \mathbf{b}_2, \\ \mathbf{Q}_{i3} + \mathbf{Q}_{j3} = \mathbf{b}_3, \\ \mathbf{Q}_{i4} + \mathbf{Q}_{j4} = \mathbf{b}_4, \\ \mathbf{Q}_{i5} + \mathbf{Q}_{j5} = \mathbf{b}_5, \end{array} \right. \quad (2.46)$$

где матрицы коэффициентов  $\mathbf{Q}_{i4}$ ,  $\mathbf{Q}_{j4}$ ,  $\mathbf{Q}_{i5}$ ,  $\mathbf{Q}_{j5}$  определяются следующим образом:

$$\mathbf{Q}_{ik} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \left( \mathbf{A}^j \mathbf{A}^{iT} \mathbf{n}_k^{(i)} \right)^T \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{jk} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & - \left( \mathbf{n}_k^{(j)} \right)^T \end{pmatrix}, \\ b_k = \tilde{\omega}_i^{(i)} \mathbf{A}_i \mathbf{A}^{jT} \omega_j^{(j)} \mathbf{n}_k^{(i)},$$

где  $k$  принимает значения 4 и 5.

### 2.6.2 Кривошипно-шатунный механизм.

Запишем уравнения движения кривошипно-ползунного механизма представленного на рис. 2.9. Плоская механическая система состоит из трех тел. На рис. 2.10 изображены тела рассматриваемой системы отдельно: указаны системы координат и единичные векторы нормалей, необходимые для записи уравнений связи.

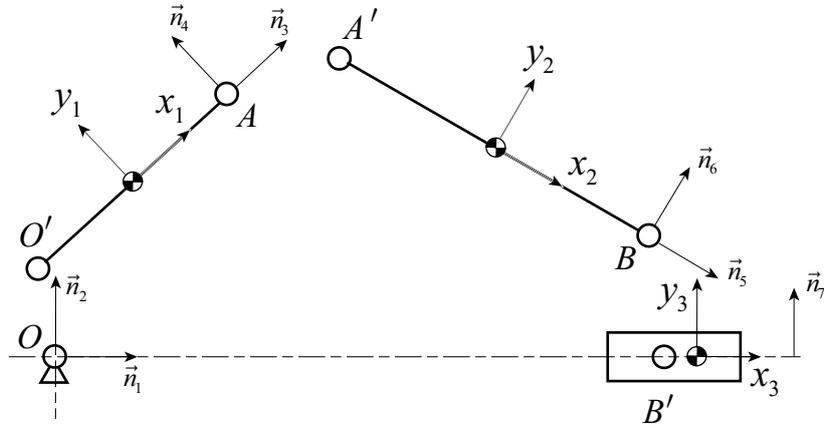


Рис. 2.10: Звенья кривошипно-ползунного механизма

Динамические уравнения движения механической системы представляет собой систему 9 скалярных уравнений:

$$\begin{cases} \mathbf{M}_1 \ddot{\mathbf{X}}_1 = \mathbf{F}_1 + \mathbf{R}_{11} + \mathbf{R}_{12} + \mathbf{R}_{13} + \mathbf{R}_{14} \\ \mathbf{M}_2 \ddot{\mathbf{X}}_2 = \mathbf{F}_2 + \mathbf{R}_{23} + \mathbf{R}_{24} + \mathbf{R}_{25} + \mathbf{R}_{26} \\ \mathbf{M}_3 \ddot{\mathbf{X}}_3 = \mathbf{F}_3 + \mathbf{R}_{35} + \mathbf{R}_{36} - \mathbf{R}_{37} \end{cases} \quad (2.47)$$

где:  $\ddot{\mathbf{X}}_i = (\ddot{x}_i \quad \ddot{y}_i \quad \ddot{\phi}_i)^T$  - координатный столбец ускорений тела  $i$ ;  $\mathbf{M}_i$  - диагональная матрица масс:

$$\mathbf{M}_i = \begin{pmatrix} m_i & 0 & 0 \\ 0 & m_i & 0 \\ 0 & 0 & J_i \end{pmatrix};$$

$\mathbf{F}_i = (F_{ix} \quad F_{iy} \quad L_{iz})^T$  - координатный столбец активных сил и моментов, действующих на тело  $i$ ;  $R_{il}$ ,  $l = 1, \dots, 7$  - координатные столбцы сил и моментов реакции, действующих на тело  $i$  -  $\mathbf{R}_{il} = (R_{ilx} \quad R_{ily} \quad L_{Rilz})^T$ . Для рассматриваемой системы необходимо записать 7 уравнений связи вида (2.43): по два на каждый из трех цилиндрических шарниров и одно уравнение связи на поступательный шарнир между телом 3 и телом 0. Для того, чтобы тело три двигалось только поступательно необходимо

добавить восьмое уравнение связи, ограничивающее вращение тела 3 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Q}_{11}\ddot{\mathbf{X}}_1 = b_1 \\ \mathbf{Q}_{21}\ddot{\mathbf{X}}_1 = b_2 \\ \mathbf{Q}_{31}\ddot{\mathbf{X}}_1 + \mathbf{Q}_{32}\ddot{\mathbf{X}}_2 = b_3 \\ \mathbf{Q}_{41}\ddot{\mathbf{X}}_1 + \mathbf{Q}_{42}\ddot{\mathbf{X}}_2 = b_4 \\ \mathbf{Q}_{52}\ddot{\mathbf{X}}_2 + \mathbf{Q}_{53}\ddot{\mathbf{X}}_3 = b_5 \\ \mathbf{Q}_{62}\ddot{\mathbf{X}}_2 + \mathbf{Q}_{63}\ddot{\mathbf{X}}_3 = b_6 \\ \mathbf{Q}_{73}\ddot{\mathbf{X}}_3 = b_7 \mathbf{Q}_{83}\ddot{\mathbf{X}}_3 = b_8 \end{array} \right. \quad (2.48)$$

где матрицы коэффициентов при ускорениях и скаляр  $b_k$  определяются для первых двух уравнений связи:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{k1} &= \begin{pmatrix} \mathbf{n}_k^{(0)T} & \mathbf{n}_k^{(0)T} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{A}^1 \rho_{1k}^{(1)} \end{pmatrix}, \\ b_k &= \mathbf{n}_k^{(0)T} \dot{\phi}_1^2 \mathbf{A}^1 \rho_{1k}^{(1)}, k = 1, 2 \end{aligned}$$

где  $k = 1, 2$ . Для последующих четырех уравнений связи:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{ki} &= \begin{pmatrix} -\mathbf{n}_k^{(i)T} \mathbf{A}^{iT} & \mathbf{n}_k^{(i)T} \mathbf{A}^{iT} \boldsymbol{\Omega}^T \rho_{ik} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{Q}_{kj} &= \begin{pmatrix} \mathbf{n}_k^{(i)T} \mathbf{A}^{iT} & \mathbf{n}_k^{(i)T} \mathbf{A}^{iT} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{A}^j \rho_{jk}^{(j)} \end{pmatrix}, \\ b_k &= \mathbf{n}_k^{(i)T} \left( \dot{\phi}_i^2 \mathbf{A}^{iT} \rho_{ik} - 2\dot{\phi}_i \mathbf{A}^{iT} \boldsymbol{\Omega}^T \dot{\rho}_{ik} + \mathbf{A}^{iT} \dot{\phi}_j^2 \mathbf{A}^j \rho_{jk}^{(j)} \right), \end{aligned}$$

где  $k = 3, 4$  для  $i = 1$  и  $j = 2$ , и  $k = 5, 6$  для  $i = 2$  и  $j = 3$ . Для седьмого уравнения связи:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{73} &= \begin{pmatrix} \mathbf{n}_7^{(0)T} & \mathbf{n}_7^{(0)T} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{A}^3 \rho_{37}^{(1)} \end{pmatrix}, \\ b_7 &= \mathbf{n}_7^{(0)T} \dot{\phi}_3^2 \mathbf{A}^3 \rho_{37}^{(1)}. \end{aligned}$$

Для последнего уравнение связи:

$$\mathbf{Q}_{83} = (0 \ 0 \ 1)^T, \quad b_8 = 0.$$

Силы и моменты реакции  $\mathbf{R}_k$  определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_{11} &= \mathbf{Q}_{11}^T \lambda_1 \\
 \mathbf{R}_{12} &= \mathbf{Q}_{21}^T \lambda_2 \\
 \mathbf{R}_{13} &= \mathbf{Q}_{31}^T \lambda_3 \\
 \mathbf{R}_{14} &= \mathbf{Q}_{41}^T \lambda_4 \\
 \mathbf{R}_{23} &= \mathbf{Q}_{32}^T \lambda_3 \\
 \mathbf{R}_{24} &= \mathbf{Q}_{42}^T \lambda_4 \\
 \mathbf{R}_{25} &= \mathbf{Q}_{52}^T \lambda_5 \\
 \mathbf{R}_{26} &= \mathbf{Q}_{62}^T \lambda_6 \\
 \mathbf{R}_{35} &= \mathbf{Q}_{53}^T \lambda_5 \\
 \mathbf{R}_{36} &= \mathbf{Q}_{63}^T \lambda_6 \\
 \mathbf{R}_{37} &= \mathbf{Q}_{73}^T \lambda_7 \\
 \mathbf{R}_{38} &= \mathbf{Q}_{83}^T \lambda_8
 \end{aligned}$$

Таким образом, матричная форма уравнений движения системы будет иметь следующий вид:

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$$

с матрицей коэффициентов:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}
 \mathbf{M}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{11}^T & \mathbf{Q}_{21}^T & \mathbf{Q}_{31}^T & \mathbf{Q}_{41}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
 \mathbf{0} & \mathbf{M}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{32}^T & \mathbf{Q}_{42}^T & \mathbf{Q}_{52}^T & \mathbf{Q}_{62}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
 \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{53}^T & \mathbf{Q}_{63}^T & \mathbf{Q}_{73}^T & \mathbf{Q}_{83}^T \\
 \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{0} \\
 \mathbf{Q}_{21} & \mathbf{0} \\
 \mathbf{Q}_{31} & \mathbf{Q}_{32} & \mathbf{0} \\
 \mathbf{Q}_{41} & \mathbf{Q}_{42} & \mathbf{0} \\
 \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{52} & \mathbf{Q}_{53} & \mathbf{0} \\
 \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{62} & \mathbf{Q}_{63} & \mathbf{0} \\
 \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{73} & \mathbf{0} \\
 \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{83} & \mathbf{0} & \mathbf{0}
 \end{bmatrix}$$

столбцом неизвестных:

$$\mathbf{X} = (\ddot{\mathbf{X}}_1 \quad \ddot{\mathbf{X}}_2 \quad \ddot{\mathbf{X}}_3 \quad \lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3 \quad \lambda_4 \quad \lambda_5 \quad \lambda_6 \quad \lambda_7 \quad \lambda_8)^T,$$

и матрицей правых частей:

$$\mathbf{B} = (\mathbf{F}_1 \quad \mathbf{F}_2 \quad \mathbf{F}_3 \quad b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4 \quad b_5 \quad b_6 \quad b_7 \quad b_8)^T.$$

## 2.7 Перестановка элементов матрицы

После того как, получена система уравнений движения механической системы, необходимо ее разрешить относительно старших производных и множителей Лагранжа. Эта операция производится на каждом шаге процедуры численного интегрирования системы, и поэтому необходимо, чтобы она выполнялась с наименьшими затратами машинного времени, поскольку практика показывает, что наибольшая часть машинного времени тратится именно на эту операцию. Скорость решения особенно важна при проведении стохастического моделирования механических систем, которое требует многократного проведения расчетов.

Уравнения движения механической системы с уравнениями связи в матричной форме имеют вид:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{Q}^T \\ \mathbf{Q} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{X}} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}. \quad (2.49)$$

Уравнения (2.49) представляют собой систему линейных уравнений вида:

$$\mathbf{H}\xi = \mathbf{V}, \quad (2.50)$$

с симметрической матрицей  $\mathbf{H}$ . На каждом шаге процедуры численного интегрирования необходимо решать систему для определения ускорений тел системы и, если необходимо, множителей Лагранжа. Ускорение тел системы может быть определено следующим образом. Перепишем систему (2.49):

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{Q}^T\lambda = \mathbf{F}, \\ \mathbf{Q}\ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{b}. \end{cases} \quad (2.51)$$

из первого уравнения системы выразим ускорения  $\ddot{\mathbf{X}}$ :

$$\ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{F} - \mathbf{Q}^T\lambda), \quad (2.52)$$

и подставим это результат во второе уравнение системы (2.51):

$$\mathbf{Q}\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{F} - \mathbf{Q}^T\lambda) = \mathbf{b}. \quad (2.53)$$

Из уравнения (2.54) определяется матрица множителей Лагранжа:

$$\lambda = (\mathbf{Q}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q}^T)^{-1}(\mathbf{Q}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{F} - \mathbf{b}), \quad (2.54)$$

которую необходимо подставить в уравнение (2.52) для определения матрицы ускорений  $\ddot{\mathbf{X}}$ . Размерность матрицы коэффициентов  $\mathbf{Q}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q}^T$ , разложение которой необходимо выполнять на каждом шаге интегрирования, равна количеству связей в системе. Заполненность матрицы ненулевыми элементами зависит от структуры системы и скорость решения или количество операций будет зависеть от количества ненулевых элементов.

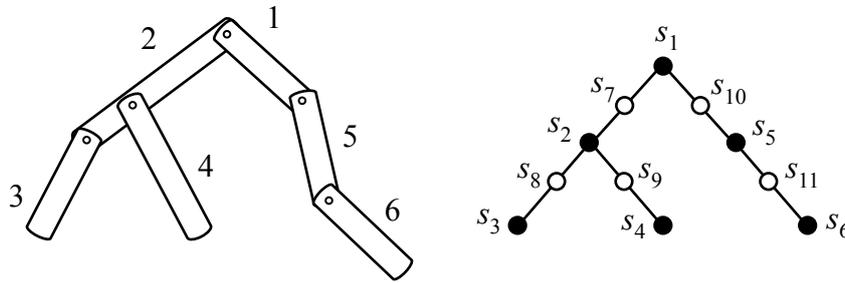


Рис. 2.11: Система со структурой дерева и ее граф.

Другой подход для систем, состоящих из большого числа тел и имеющих древовидную структуру, предложенный в [1], основан на анализе структуры механической системы. Данный метод непосредственно решает систему (2.7), что в некоторых случаях позволяет значительно сократить количество операций на разрешение системы линейных уравнений. Сокращение количества операций достигается перераспределением элементов матрицы  $\mathbf{H}$ . Для применения предлагаемого метода необходимо рассмотреть структуру матрицы  $\mathbf{H}$  при помощи соответствующего ей графа. Граф симметричной матрицы  $n \times n$  есть неориентированный граф с  $n$  вершинами. Если матрица имеет ненулевой элемент  $H_{ij}$ , то существует дуга, соединяющая вершины  $i$  и  $j$ , а диагональные элементы не вносят в граф дополнительных дуг. На рисунке 2.11 представлен пример механической системы со структурой дерева и ее граф где черными кружками обозначены вершины графа, соответствующие телам, белые - вершины, соответствующие связям. Нумерация вершин графа произвольная. На рисунке 2.12 приведена структура матрицы  $\mathbf{H}$ , где серым цветом обозначены ненулевые блоки. Рассматривая структуру матрицы  $\mathbf{H}$  можно заключить, что при выполнении разложения матрицы  $\mathbf{H}$  на множители, например, методом Гаусса ( $LU$  - разложение), вне диагонали будут появляться дополнительные ненулевые элементы. Обнуление, например, поддиагональных элементов матрицы  $\mathbf{H}$  - эти блоки соответствуют коэффициентам при ускорениях в уравнениях связи, будет приводить к тому, что в нижнем углу матрицы будут появляться новые ненулевые элементы, обнуление которых потребует дополнительных вычислительных затрат. Чтобы исключить появление ненулевых элементов, необходимо перераспределить элементы матрицы  $\mathbf{H}$  следующим образом. Граф матрицы состоит из  $N + l = 11$  вершин - шести тел и пяти связей. Примем одну из вершин, например, вершину, соответствующую телу 6, за корень дерева, задавая, таким образом, в графе отношение «потомок-родитель», и, следовательно, рассматривая граф как ориентированное

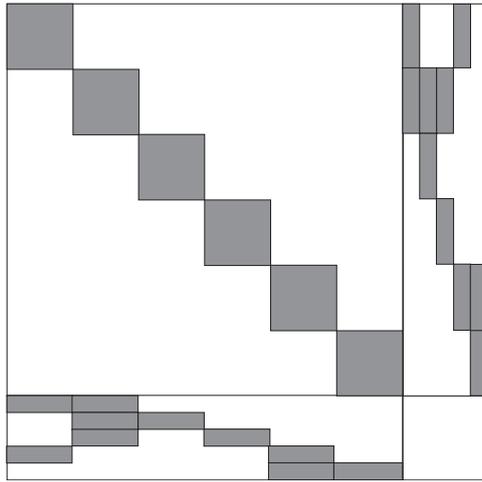


Рис. 2.12: Структура матрицы  $H$

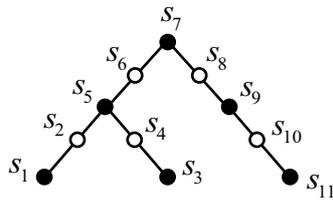


Рис. 2.13: Граф системы с правильной нумерацией

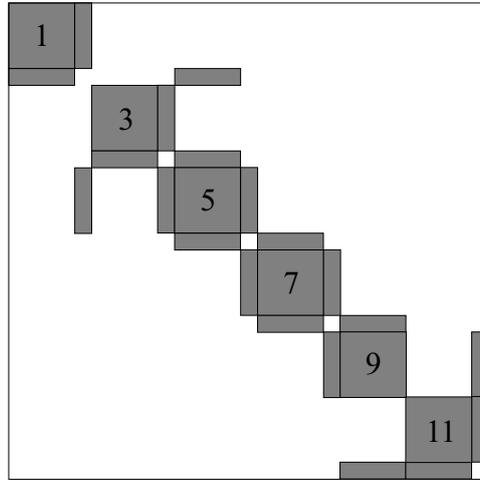


Рис. 2.14: Структура новой матрицы  $H$

дерево. Присвоим этой вершине индекс  $N + l = 11$ . Далее пронумеруем все остальные вершины так, чтобы номер любой родительской вершины был больше номера любого потомка этой вершины, то есть произведем «правильную» нумерацию графа, о которой было сказано выше в разделе посвященном описанию структуры механических систем. На рисунках 2.13 и 2.14 представлены структура системы и матрицы  $H$  после проведения такого упорядочивания индексов вершин. Из рисунка 2.14 следует, что при разложении преобразованной матрицы на множители для определения ускорений тел механической системы дополнительные ненулевые внедиагональные элементы появляться уже не будут.

При численном анализе задач вообще, и при решении систем линейных уравнений, в частности, всегда необходимо учитывать специфику задачи. В данном случае могут быть использованы специальные алгоритмы разложения симметрической матрицей коэффициентов, которые позволяют сократить количество операций необходимых для решения исходной системы (2.49). Для матрицы коэффициентов  $H$  целесообразно использовать  $LDL^T$  разложение, которое позволяет в два раза сократить количество операций для решения системы уравнений в сравнении с известным  $LU$  разложением Гаусса [8]:

$$LDL^T \xi = \mathbf{b}. \quad (2.55)$$

Далее выполняется прямая подстановка:

$$L\mathbf{u} = \mathbf{b}, \quad (2.56)$$

$$D\mathbf{q} = \mathbf{u}, \quad (2.57)$$

и обратная подстановка:

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\xi} = \mathbf{q}. \quad (2.58)$$

При **LDL** разложении в унитреугольной матрице **L** ненулевые элементы будут находится в тех-же позициях, что и у матрице **H**. Этот факт позволяет задать итеративную процедуры разложения матрицы **H** на множители, рассмотрев левые и правые части уравнения:

$$\mathbf{H} = \mathbf{LDL}^T. \quad (2.59)$$

и приравнять соответствующие элементы:

$$\mathbf{D}_{ii} = \mathbf{H}_{ii} - \sum_{k \in \text{child}(i)} \mathbf{H}_{ki} \mathbf{D}_{kk} \mathbf{H}_{ki}^T, \quad (2.60)$$

$$\mathbf{L}_{i, \text{par}(i)} = \mathbf{D}_{ii}^{-1} \mathbf{H}_{i, \text{par}(i)}, \quad (2.61)$$

где  $\text{child}(i)$  – множество индексов вершин-потомков вершины  $i$ ;  $\text{par}(i)$  – вершина-родитель для вершины  $i$ .

### 3 Уравнения движения в обобщенных координатах

#### 3.1 Уравнения движения

Как было отмечено выше в технике чаще встречаются механические системы имеющие замкнутую структуру. Для системы с незамкнутой структурой - структура которых описывается ациклическими графами проще получит уравнения движения и эти уравнения проще решаются. Рассмотрим простейшую механическую систему с незамкнутой структурой тела которой соединены только сферическими шарнирами. Полученные результаты будут использованы для вывода уравнений движения более сложных систем с универсальными и цилиндрическими шарнирами.

#### 3.2 Системы тел со структурой дерева, соединенные сферическими шарнирами

Рассмотрим механическую систему тела которой соединены только сферическими шарнирами и граф структуры которой ациклический. На рис. 3.1 изображено одно из тел системы. Все силы, приложенные к телу

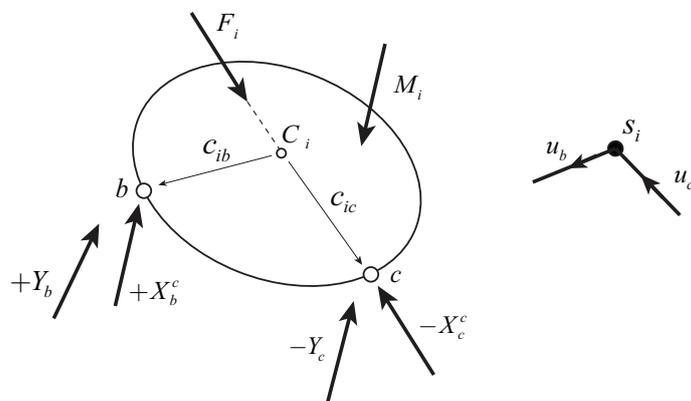


Рис. 3.1: Тело механической системы со сферическими шарнирами и соответствующая ему вершина графа

$i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) и моменты внешних сил объединяются в главный вектор внешних сил  $F_i$ , линия действия которого проходит через центр масс тела  $C_i$ , и главным момент внешних сил  $M_i$ . Силы и моменты, действующие в каждом шарнире  $a$  ( $a = 1, \dots, n$ ), объединяются в главный вектор шарнирных сил  $X_a^c$ , линия действия которого проходит через шарнирную

точку  $a$ , и главный момент шарнирных сил  $Y_a$ . На тело  $i^+(a)$  действует сила  $+X_a^c$  и моменты сил  $+Y_a$ , на смежное тело  $i^-(a)$  действует сила  $-X_a^c$  и момент  $-Y_a$ .

Шарнирные силы, действующие на тело можно записать при помощи матрицы  $S$ : в шарнире  $b$  сила  $S_{ib}X_b^c$ , в шарнире  $c$  сила  $S_{ic}X_c^c$ . Поскольку элемент матрицы  $S_{ia}$  равен нулю если  $a$  есть индекс шарнира, который не расположен на теле  $i$ , то главный вектор всех шарнирных сил, действующих на тело можно представить в виде суммы  $\sum_{a=1}^n S_{ia}X_a^c$ . Уравнение движение центра масс тела  $i$  примет следующий вид:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \sum_{a=1}^n S_{ia} \mathbf{X}_a^c, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.1)$$

где  $m_i$  - масса тела,  $r_i$  - радиус-вектор центра масс  $C_i$  относительно инерциальной системы координат. Запишем уравнения движения тела вокруг своего центра масс. Главный момент сил и моментов реакции относительно  $C_i$ :  $(c_{ib} \times X_b^c + Y_b) - (c_{ic} \times X_c^c + Y_c)$  при помощи матрицы  $S$  можно переписать в виде:

$$\dot{L}_i = M_i + \sum_{a=1}^n S_{ia}(c_{ia} \times X_a^c + Y_a), \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.2)$$

где вектора  $c_{ib}$  и  $c_{ic}$  задают положение шарнирных точек относительно точки  $C_i$  (рис. 3.1) Уравнения (3.1) и (?) можно записать в матричном виде: где  $\mathbf{L}_i$  - момент количества движения абсолютного движения тела  $i$  относительно  $\mathbf{C}_i$ ;  $\mathbf{m}_i$  - диагональная матрица масс;  $\mathbf{C}$  -  $(n \times n)$  матрица с элементами:

$$C_{ia} = S_{ia}c_{ia}, \quad i, a = 1, \dots, n. \quad (3.3)$$

Умножим уравнение (3.1) слева на  $\mathbf{T}$  получим явное выражение для сил реакции:

$$\mathbf{X}^c = \mathbf{T}(\mathbf{m}\ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{F}). \quad (3.4)$$

Подставив это выражение в (3.2) получим:

$$\dot{\mathbf{L}} - \mathbf{C}\mathbf{T} \times (\mathbf{m}\ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{F}) = \mathbf{M} + \mathbf{S}\mathbf{Y}. \quad (3.5)$$

Радиус-вектор тела  $r_i$  можно представить в виде суммы  $r_0$  и суммы векторов каждый из которых фиксирован в одном из тел. Ускорение  $\ddot{\mathbf{r}}_i(t)$  тела  $i$  будет функцией  $\ddot{\mathbf{r}}_0(t)$  некоторых фиксированных векторов, зависящих от расположения шарниров и угловых скоростей и ускорений.

Рассмотрим два смежных тела  $i^+(a)$  и  $i^-(a)$ . Для любой пары смежных тел можно записать выражение:

$$(r_{i^+(a)} + c_{i^+(a)a}) - (r_{i^-(a)} + c_{i^-(a)a}) = 0, \quad a = 1, \dots, n. \quad (3.6)$$

В последнем выражении предполагаем, что  $c_{0a} = 0$  для всех  $a = 1, \dots, n$ .  
Выражение (3.6) можно переписать в в виде:

$$\sum_{i=0}^n S_{ia}(r_i + c_{ia}) = 0, \quad a = 1, \dots, n. \quad (3.7)$$

Принимая во внимание выражение (3.3) запишем последнее выражение при помощи элементов матриц:

$$S_{0a}r_0 + \sum_{i=1}^n (S_{ia}r_i + C_{ia}) = 0, \quad a = 1, \dots, n, \quad (3.8)$$

или в матричной форме:

$$\mathbf{r}_0 \mathbf{S}_0^T + \mathbf{S}^T \mathbf{r} + \mathbf{C}^T \mathbf{1}_n = \mathbf{0}. \quad (3.9)$$

Умножим (3.9) слева на  $\mathbf{T}^T$  получим явное выражение для матрицы  $\mathbf{r}$ :

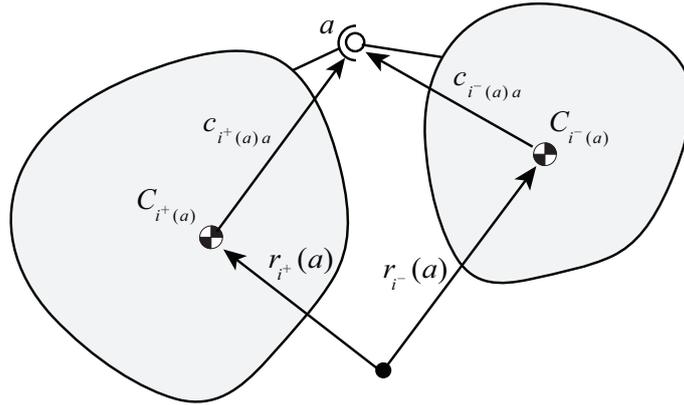


Рис. 3.2: Кинематика смежных тел

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 \mathbf{1}_n - (\mathbf{C}\mathbf{T})^T \mathbf{1}_n. \quad (3.10)$$

Элементы матрицы  $\mathbf{C}\mathbf{T}$  обозначим как  $d_{ij}$ :

$$d_{ij} = (\mathbf{C}\mathbf{T})_{ij} = \sum_{a=1}^n T_{aj} S_{ia} c_{ia}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (3.11)$$

Из выражения (3.11) следует, что вектора  $d_{ij}$  фиксированы в теле  $i$ , поскольку фиксированы составляющие их вектора  $S_{ia}c_{ia}$ . С учетом новых обозначений радиус-вектор тела  $i$  определяется следующим образом:

$$r_i = r_0 - \sum_{j=1}^n d_{ji}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.12)$$

Для определения физического смысла векторов  $d_{ij}$  запишем выражение (3.11) в следующем виде, переставив индексы  $i$  и  $j$ :

$$\mathbf{d}_{ji} = \sum_{a=1}^n T_{ai} S_{ja} \mathbf{c}_{ja}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (3.13)$$

Произведения  $T_{ai} S_{ja}$  отличны от нуля только для тех дуг  $u_a$ , которые принадлежат пути между  $s_0$  и  $s_i$  ( $T_{ai} \neq 0$ ) и которые, инцидентны  $s_j$  ( $S_{ja} \neq 0$ ). Необходимо различать три случая:

1.  $s_j$  не лежит на пути от тела 0 к телу  $s_i$  - в этом случае ни одна из дуг не вносит вклад в сумму (3.13) и следовательно  $d_{ij} = 0$ ;
2.  $s_j$  лежит на пути от тела 0 к телу  $s_i$  - в этом случае вклад в сумму (3.13) вносят две дуги, обозначим их индексами  $b$  и  $c$ , и следовательно  $d_{ij} = c_{jb} - c_{jc}$ , поскольку  $T_{bi} S_{jb} = +1$ ,  $T_{ci} S_{jc} = -1$  где  $b$  - индекс дуги  $u_b$  предшествующей вершине  $s_i$ ;
3.  $s_j$  и  $s_i$  - одно тело, в этом случае только дуга  $u_b$ , предшествующая  $s_i$ , дает вклад в сумму и следовательно  $d_{ij} = c_{ib}$ .

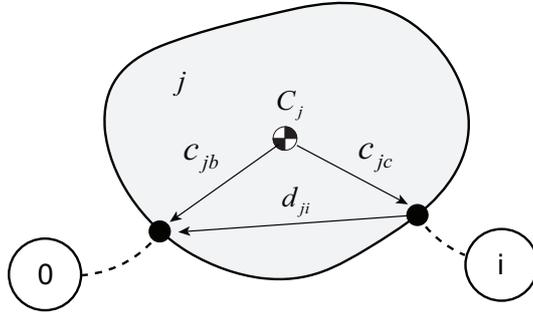


Рис. 3.3: К определению вектора  $d_{ij}$

Подставим в уравнение движения (3.5) вторую производную по времени от  $\mathbf{r}$ :

$$\dot{\mathbf{L}} - \mathbf{CT} \times \mathbf{m}(\ddot{\mathbf{CT}})^T \mathbf{1}_n - (\mathbf{CT}) \times (\mathbf{r}_0 \mathbf{m} \mathbf{1}_n - \mathbf{F}) = \mathbf{M} + \mathbf{SY}. \quad (3.14)$$

Рассмотрим матрицу  $(\mathbf{CT}) \times \mathbf{m}(\ddot{\mathbf{CT}})^T$ , с элементами  $g_{ij}$ :

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^n m_k d_{ik} \times \ddot{d}_{jk}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (3.15)$$

Будем различать случаи

1.  $i = j$ ;
2.  $s_i$  лежит на пути от тела  $j$  к телу 0;
3.  $s_j$  лежит на пути от тела  $i$  к телу 0;
4. все прочие случаи.

$$g_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=1}^n m_k d_{ik} \times \ddot{d}_{ik}, & s_i = s_j \\ \ddot{d}_{ij} \times \sum_{k=1}^n m_k \ddot{d}_{jk}, & s_i < s_j \\ \sum_{k=1}^n m_k d_{ik} \times \ddot{d}_{ji}, & s_j < s_i \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (3.16)$$

Для каждого тела  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) определим понятие дополненного тела следующим образом. К исходному телу  $i$  на концы каждого шарнирного вектора  $c_{ia}$  присоединим точечные массы с массой всех тел (за исключением тела 0) которые связаны с телом  $i$  непосредственно или косвенно через шарнир  $a$ . Центр масс дополненного тела - *барицентр*  $B_i$

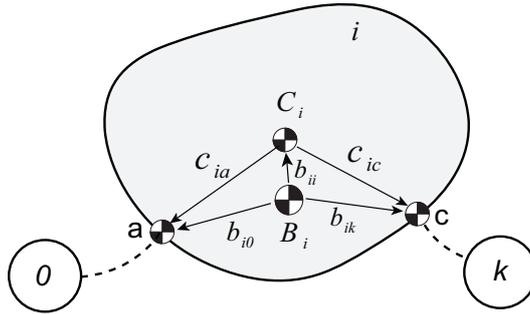


Рис. 3.4: К определению барицентра  $B_i$

не совпадает с центром масс исходного тела  $C_i$  см. рисунок (3.4). Определенные на дополненном теле векторы  $b_{ij}$  жестко связаны с телом  $i$ . Очевидно, что количество различных векторов меньше числа различных комбинаций индексов  $i$  и  $j$ , поскольку к телу  $i$  косвенно при помощи одного и того-же шарнира может быть присоединено несколько тел. Вектора  $b_{ij}$  удовлетворяют уравнениям:

$$\sum_{j=1}^n b_{ij} m_j = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.17)$$

Векторы  $b_{ij}$  и  $d_{ij}$  связаны соотношением

$$d_{ij} = b_{i0} - b_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (3.18)$$

Используя полученные соотношения перепишем выражение для элементов  $g_{ij}$ :

$$g_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=1}^n m_k d_{ik} \times \ddot{d}_{ik}, & s_i = s_j \\ M d_{ij} \times \ddot{b}_{j0}, & s_i < s_j \\ M b_{i0} \times \ddot{d}_{ji}, & s_j < s_i \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (3.19)$$

Подставим выражения (3.19) в уравнение (3.14) получим следующую систему уравнений:

$$\dot{L}_i + \sum_{j=1}^n g_{ij} - \sum_{j=1}^n d_{ij} \times (m_j \ddot{r}_0 - F_j) = M_i + \sum_{a=1}^n S_{ia} Y_a, \quad i = 1, \dots, n,$$

или в явной форме

$$\dot{L}_i + \sum_{j=1}^n g_{ij} - \sum_{j=1}^n d_{ij} \times (m_j \ddot{r}_0 - F_j) = M_i + \sum_{a=1}^n S_{ia} Y_a, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.20)$$

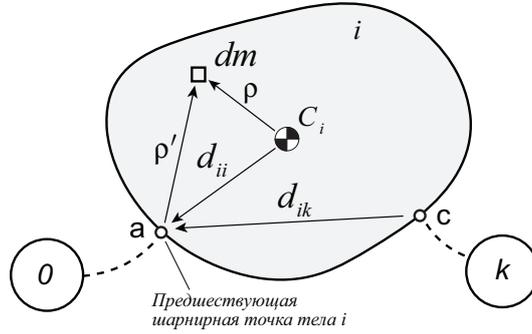


Рис. 3.5: К определению тензора инерции относительно предшествующей шарнирной точки

Рассмотрим момент количества движения тела  $i$  относительно шарнирной точки  $a$ :  $L'_i = \int_m \rho' \times \dot{\rho}' dm$ . Производную от  $L'_i$  можно записать в следующем виде:

$$\frac{dL'_i}{dt} = \int_{m_i} (\rho - d_{ii}) \times (\ddot{\rho} - \ddot{d}_{ii}) dm,$$

раскрывая скобки и учитывая, что  $\int_m \rho dm = 0$  получим:

$$\frac{dL'_i}{dt} = \dot{L}_i + m_i d_{ii} \times \ddot{d}_{ii}. \quad (3.21)$$

Если к последнему выражению добавить сумму  $\sum_{k=1}^n m_k d_{ik} \times \ddot{d}_{ik}$ , то получаться два первых члена в уравнении (3.20). Таким образом, первые два члена уравнения (3.20) представляют собой абсолютную производную по времени от момента количества абсолютного движения дополненного тела  $i$  относительно его предшествующей шарнирной точки. Пусть  $K_i$  - тензор инерции дополненного тела  $i$  по отношению к его предшествующей шарнирной точке.  $\mathbf{K}_i$  связан с центральным тензором инерции исходного тела  $\mathbf{J}_i$  следующим соотношением:

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{J}_i + \sum_{k=1}^n m_k (d_{ik}^2 \mathbf{E} - d_{ik} d_{ik}), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.22)$$

Два первых члена уравнения (3.20) можно выразить используя угловую скорость вращения тела  $\omega_i$ :

$$\dot{L}_i + \sum_{k=1}^n m_k d_{ik} \times \ddot{d}_{ik} = \mathbf{K}_i \omega_i + \omega_i \times \mathbf{K}_i \omega_i. \quad (3.23)$$

Рассмотрим следующий член уравнения, содержащий  $\ddot{r}_0$ :

$$\sum_{j=1}^n d_{ij} m_j \times \ddot{r}_0 = \sum_{j=1}^n (b_{i0} - b_{ij}) m_j \times \ddot{r}_0 = b_{i0} \times M \ddot{r}_0. \quad (3.24)$$

В выражении, содержащем внешние силы  $F_j$ , множитель  $d_{ij}$  отличен от нуля только для тех значений  $j$ , которые удовлетворяют соотношению  $s_i \leq s_j$ . Учитывая это преобразуем уравнения движения к виду:

$$\begin{aligned} & \mathbf{K}_i \dot{\omega}_i + \omega_i \times \mathbf{K}_i \omega_i + M \left( \sum_{j:s_i < s_j} \ddot{d}_{ij} \times b_{j0} + b_{i0} \times (-\ddot{r}_0 + \sum_{j:s_j < s_i} \ddot{d}_{ji}) \right) + \\ & + \sum_{j:s_i < s_j} d_{ij} \times F_j = M_i + \sum_{a=1}^n S_{ia} Y_a, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Вторые производные от  $b_{j0}$  и  $d_{ji}$  заменим выражениями:

$$\ddot{b}_{j0} = \dot{\omega}_j \times b_{j0} + \omega_j \times (\omega_j \times b_{j0}), \quad (3.26)$$

$$\ddot{d}_{ji} = \dot{\omega}_j \times d_{ji} + \omega_j \times (\omega_j \times d_{ji}), \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (3.27)$$

Уравнение движения запишем в виде:

$$M(-b_{i0}) \times (\ddot{r}_0 - \sum_{j:s_j < s_i} \ddot{d}_{ji}) + \mathbf{K}_i \dot{\omega}_i + \omega_i \times \mathbf{K}_i \omega_i = M_i^P, \quad (3.28)$$

где  $M_i^P$  определяется следующим образом:

$$M_i^P = \sum_{a=1}^n S_{ia} Y_a + M_i - d_{ii} \times F_i - \sum_{j:s_i < s_j} d_{ij} \times (M \ddot{b}_{j0} + F_j).$$

Уравнение (3.28) представляет собой уравнение момента количества движения для одного твердого тела, записанного относительно неподвижной в теле точки. В общем виде уравнение момента количества движения имеет следующий вид:

$$m \mathbf{r}_c \times \ddot{\mathbf{z}}_p + \mathbf{J}^p \dot{\omega} + \omega \times \mathbf{J}^p \omega = \mathbf{M}^p,$$

где  $p$  - неподвижный в теле полюс;  $\ddot{\mathbf{z}}_p$  - абсолютное ускорение полюса;  $\mathbf{J}^p$  - тензор инерции относительно  $p$ ;  $\mathbf{M}^p$  - момент внешних сил относительно  $p$ ;  $\mathbf{r}_c$  - вектор проведенный из точки  $p$  в центр масс. Если рассматривать дополненное тело  $i$ , а в качестве неподвижной точки в дополненном принять предшествующую шарнирную точку, то получим уравнение аналогичное (3.28). В этом случае масса тела равна массе всей системы  $M$ , его центр масс находится в барицентре. Вектор проведенный из предшествующей шарнирной точки в барицентр равен  $-b_{i0}$ , выражение  $\ddot{r}_0 - \sum_{j:s_j < s_i} \ddot{d}_{ji}$  является абсолютным ускорением полюса  $p$ , поскольку радиус-вектор точки  $p$  в инерциальном пространстве есть  $r_i + d_{ii}$  или  $r_0 + \sum_{j=1}^n d_{ij}$ , что совпадает с  $r_0 - \sum_{j:s_j < s_i} d_{ji}$  поскольку  $d_{ji} = 0$  для всех  $s_j \not\leq s_i$ . Рассмотрим правую часть уравнения (3.28). Момент силы  $\mathbf{M}_i^p$  содержит главный момент  $\sum_{a=1}^n S_{ia} Y_a$  всех внутренних шарнирных сил, действующих на тело  $i$ , и момент внешних сил  $M_i$ . Линия действия внешней силы по принятому соглашению проходит через центр масс тела, поэтому  $d_{ii} \times F_i$  есть момент этой силы относительно предшествующей шарнирной точки. Момент силы  $-d_{ij} \times (M \ddot{b}_{j0} + F_j)$  можно интерпретировать следующим образом. Предположим, что дополненное тело  $j$  отделено от системы и подвешено как маятник в своей предшествующей шарнирной точке. На дополненное тело  $j$  действует внешняя сила  $F_j$ . Если дополненное тело массы  $M$  с центром масс  $B_j$  вращается с угловым ускорением  $\dot{\omega}_j$  и угловой скоростью  $\omega_j$  то на подвес действует сила  $M \ddot{b}_{j0} + F_j$ . Приведем силу к шарнирной точке на теле  $i$ , ведущей к телу  $j$ . На тело  $i$  относительно точки  $a$  действует момент этой силы  $-d_{ij} \times (M \ddot{b}_{j0} + F_j)$ .

Итак, уравнения движения системы твёрдых тел имеют следующий

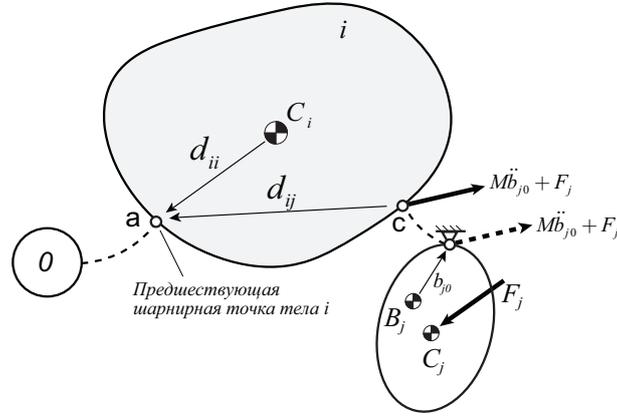


Рис. 3.6: К определению  $M\ddot{b}_{i0} + F_j$ .

вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_i \dot{\omega}_i + M \left( \sum_{j:s_i < s_j} d_{ij} \times (\dot{\omega}_j \times b_{j0}) + b_{i0} \times \sum_{j:s_j < s_i} \dot{\omega}_j \times d_{ji} \right) = \\ = M'_i + M_i + \sum_{a=1}^n S_{ia} Y_a, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.29)$$

где:

$$\begin{aligned} M'_i = -\omega_i \times K_i \omega_i - M \left( \sum_{j:s_i < s_j} d_{ij} \times (\omega_j \times (\omega_j \times b_{j0})) + \right. \\ \left. + b_{i0} \times (-\ddot{r}_0 + \sum_{j:s_j < s_i} \omega_j \times (\omega_j \times d_{ji})) \right) - \\ - \sum_{j:s_i \leq s_j} d_{ij} \times F_j, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Для численных расчетов двойные векторные произведения выражаются через матричные произведения следующим образом:

$$d_{ij} \times (\dot{\omega}_j \times b_{j0}) = (b_{j0} d_{ij} E - b_{j0} d_{ij}) \dot{\omega}_j.$$

Рассмотрим матрицу:

$$\mathbf{K}_{ij} = \begin{cases} K_i, & i = j, \\ M(b_{j0} \cdot d_{ij} E - b_{j0} d_{ij}), & s_i < s_j, \\ M(d_{ji} \cdot b_{i0} E - d_{ji} b_{i0}), & s_j < s_i, \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (3.31)$$

При помощи матриц  $\mathbf{K}_{ij}$  уравнение движения можно записать в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{K}_{ij} \dot{\omega}_j = M'_i + M_i + \sum_{a=1}^n S_{ia} Y_a, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.32)$$

Система (3.32) представляет собой матричную запись системы  $3n$  скалярных дифференциальных уравнений первого порядка. Эту систему необходимо дополнить кинематическими уравнениями, которые связывают производные от обобщенных координат с угловыми скоростями тел.

При реализации численного метода следует учесть, что операции скалярного и диадного произведения векторов в выражении (3.31) должны производиться в одной системе координат, например, скалярное произведение  $b_{j0} \cdot d_{ij}$  в координатной форме может выглядеть следующим образом:

$$\mathbf{b}_{j0}^T \mathbf{A}^{(ji)} \mathbf{d}_{ij},$$

где  $\mathbf{A}^{(ji)}$  - матрица преобразования координат из системы координат  $\mathbf{e}^{(i)}$ , в которой заданы координаты  $\mathbf{d}_{ij}$  в систему  $\mathbf{e}^{(j)}$ , в которой определены координаты  $\mathbf{b}_{j0}$ .

### 3.2.1 Раскрытие створок солнечных батарей

Определим вектора  $d_{ij}$ , положение барицентра, вектора  $b_{ij}$  на примере механической системы раскрытия створок панелей солнечных батарей 3.7. При построении модели принимаем следующие допущения:

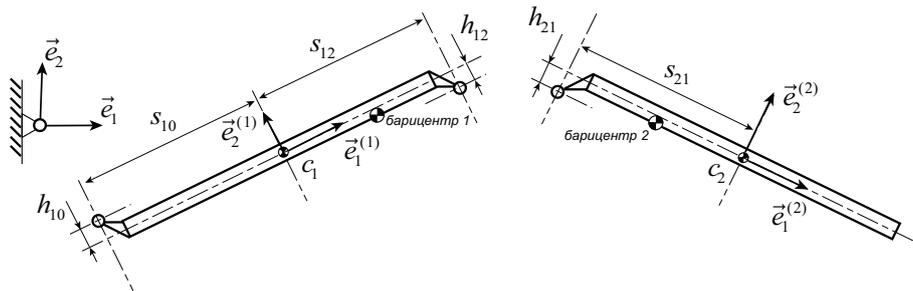


Рис. 3.7: Схема механической системы раскрытия солнечных батарей.

1. рассматривается процесс раскрытия одной панели солнечной батареи, состоящей из двух створок;
2. КА движется равномерно и прямолинейно;

3. движение КА не оказывает влияние на процесс раскрытия створок, что верно если его угловая скорость равна нулю;
4. процесс раскрытия створок не оказывает влияния на движение КА.

Принятые допущения позволяют принять, что  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$ . Начало инерциальной системы координат расположим в шарнире, соединяющем КА с первой створкой. В качестве обобщенных координат приняты углы  $\phi_1, \phi_2$  между ортами  $e_1, e_1^{(1)}$  и  $e_1, e_1^{(2)}$  соответственно. Вычислим положение барицентра. Для створки 1 дополненное тело состоит из створки 1 и точечной массы  $m_2$ , расположенной в шарнире 2, положение барицентра относительно связанной системы координат  $c_1 e_1^{(1)} e_2^{(1)}$  определяется выражением:

$$\mathbf{b}_{11}^{(1)} = -\frac{1}{m_1 + m_2} \begin{pmatrix} m_1 \cdot 0 + m_2 \cdot s_{12} \\ m_1 \cdot 0 - m_2 \cdot h_{12} \end{pmatrix},$$

для створки 2, дополненное тело состоит из самой створки 2 и точечной массы  $m_1$ , расположенной в шарнире 2. Положение барицентра створки 2 определяется следующим образом:

$$\mathbf{b}_{22}^{(2)} = -\frac{1}{m_1 + m_2} \begin{pmatrix} m_2 \cdot 0 - m_1 \cdot s_{21} \\ m_2 \cdot 0 - m_1 \cdot h_{21} \end{pmatrix}.$$

Определив положение барицентра, можно определить остальные параметры  $b_{ij}$ , см. таблицу 3.1. Далее приведен алгоритм определения положения барицентра тел системы на языке системы MATLAB:

```
% Определение положения барицентра
% res=GetBaricenterVectors(S,T,C,m)
% S - матрица инцидентности n*n
% T - матрица структуры n*n (ST=E)
% C - матрица шарнирных векторов cell(i,a)
% m - вектор масс тел системы [m1 m2 m3 ... mn]
function res=GetBaricenterVectors(S,T,C,m)
Bp=zeros(3,size(S,1));
% массы тел, путь от которых лежит через дугу a (номер строки ma)
ma=abs(T*m');
for i=1:size(S,1)
    Bp(:,i)=[0;0;0];
    for a=i+1:size(S,2)
        Bp(:,i)=Bp(:,i)+C{i,a}*ma(a)*abs(S(i,a));
    end
    % учитываем массы тел, предшествующих телу i
```

Таблица 3.1: Праметры системы

Параметры, входящие в уравнения движения	Значение
$d_{11}$	$\sqrt{s_{10}^2 + h_{10}^2}$
$d_{12}$	$\sqrt{(s_{10} + s_{12})^2 + (h_{10} + h_{12})^2}$
$d_{21}$	0
$d_{22}$	$\sqrt{s_{21}^2 + h_{21}^2}$
$b_{11}$	$\frac{m_2}{m_1+m_2} \sqrt{s_{12}^2 + h_{12}^2}$
$b_{10}$	$\sqrt{(\frac{m_2 \cdot s_{12}}{m_1+m_2} + s_{10})^2 + (-\frac{m_2 \cdot h_{12}}{m_1+m_2} - h_{10})^2}$
$b_{12}$	$\sqrt{(\frac{m_2 \cdot s_{12}}{m_1+m_2} - s_{12})^2 + (-\frac{m_2 \cdot h_{12}}{m_1+m_2} + h_{12})^2}$
$b_{22}$	$\frac{m_1}{m_1+m_2} \sqrt{s_{21}^2 + h_{21}^2}$
$b_{20}$	$\sqrt{(-\frac{m_1 \cdot s_{21}}{m_1+m_2} + s_{21})^2 + (-\frac{m_1 \cdot h_{21}}{m_1+m_2} + h_{21})^2}$
$b_{21}$	$b_{20}$
$a_{11}$	$\pi - \arctan(\frac{h_{10}}{s_{10}})$
$a_{12}$	$\pi - \arctan(\frac{h_{10}+h_{12}}{s_{10}+s_{12}})$
$a_{21}$	0
$a_{22}$	$\pi + \arctan(\frac{h_{21}}{s_{21}})$
$\beta_1$	0
$\beta_2$	0

```

    Bp(:,i)=Bp(:,i)+C{i,i}*(sum(m)-ma(i));
end
res=Bp/sum(m);

```

Результатом работы функции *GetBaricenterVectors* является матрица  $3 \times n$  каждый столбец которой представляет собой координаты вектора  $-\mathbf{b}_{i0}$  в системе координат связанной с соответствующим телом  $i$ . Зная положение барицентра, можно определить вектора  $\mathbf{b}_{ij}$  Вектора  $b_{ij}$ :

```

% Вычисление векторов b_ij
% res=GetBaricenterVectors(S,T,C,m)
% S - матрица инцидентности n*n
% T - матрица структуры n*n
% C - шарнирные вектора cell(i,a)
% B - матрица, i-ый столбец которой содержит координаты
% барицентра тела i
function res=Get_b(S,T,B,C)
% количество тел
n=size(C,1);
res=cell(n,n);
for i=1:n
    for j=1:n
        if(i==j)
            res{i,j}=-B(:,i);
        else
            if (j<i)
                res{i,j}=-B(:,i)+C{i,i};
            else
                a = dot(abs(S(i,(i+1):n).*(T((i+1):n,j))'),(1:(n-i)))+i;
                res{i,j}=-B(:,i)+C{i,a};
            end
        end
    end
end
end
end

```

### 3.2.2 Плоские цилиндрические шарниры

Рассмотрим механическую систем связанных твердых тел со структурой дерева в которой присутствуют только цилиндрические шарниры с взаимно параллельными осями. Любые два смежных тела могут только вращаться друг относительно друга. Такие системы часто встречаются

в системах ракетно-космической техники - к которым относятся и рассмотренная ранее система раскрытия створок солнечных батарей, рис. 3.8. Для записи уравнений движения можно было использовать и полученные ранее уравнения для систем со сферическими шарнирами, но очевидно, что для плоских систем число необходимых уравнений можно значительно сократить.

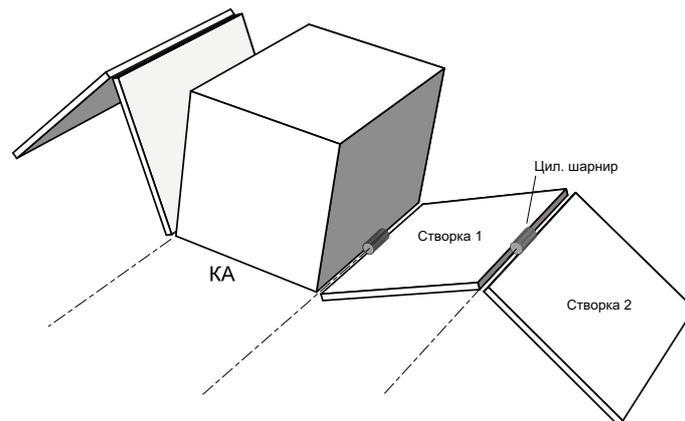


Рис. 3.8: Модель КА со створками солнечных батарей.

Уравнений движения механической системы с плоскими цилиндрическими шарнирами можно получить из системы уравнений для сферических шарниров. В правую часть уравнений движения добавим моменты силы реакции препятствующие вращению тел относительно любой оси перпендикулярной оси цилиндрических шарниров, очевидно, что векторы этих моментов также перпендикулярны осям шарниров. Если полученные уравнения движения умножить на единичный вектор  $n$ , параллельный осям шарниров, то новые моменты будут исключены. Новая система будет представлять собой систему  $n$  скалярных дифференциальных уравнений где  $n$  - число степеней свободы, равное количеству цилиндрических шарниров в системе. Наоборот от системы с только цилиндрическими шарнирами можно перейти к исходной системе со сферическими шарнирами если на осях шарниров выбрать точки в которые поместить сферические шарниры: полученные для новой системы дифференциальные уравнения не зависят от выбора точек на осях цилиндрических шарниров. Рассмотрим, например, произведение  $p \cdot d_{ij} \times (\omega_j \times (\omega_j \times b_{j0}))$ . Вектора  $p$  и  $\omega_j$  коллинеарны, поэтому можно

рассмотреть выражение  $p \cdot d_{ij} \times (p \times (p \times b_{j0}))$ :

$$\begin{aligned} p \cdot d_{ij} \times (p \times (p \times b_{j0})) &= p \cdot d_{ij} \times (p(p \cdot b_{j0}) - b_{j0}(p \cdot p)) = \\ &= d_{ij} \cdot (p(p \cdot b_{j0}) \times p) - p \cdot b_{j0} \times d_{ij} = -p \cdot b_{j0} \times d_{ij} = \\ &= -b_{j0} \cdot d_{ij} \times p = -d_{ij} \cdot p \times b_{j0}, \quad (3.33) \end{aligned}$$

из чего следует, что в рассмотренное выражение не будут входить проекции векторов  $d_{ij}$  и  $b_{j0}$  на направление  $p$ . Аналогичные преобразования можно повторить для других членов, входящих в уравнение (3.32). Далее полагаем, что все компоненты векторов, входящих в уравнения движения, имеют нулевые составляющие вдоль вектора  $n$ . Скалярное умножение уравнения (3.32) на  $n$  осуществляется следующим образом. С каждым телом свяжем базис  $\mathbf{e}^{(i)}$  так, чтобы орт  $e_3^{(i)}$  совпадал с  $n$ . Начало базиса  $\mathbf{e}^{(0)}$  помещается на оси первого шарнира, положение которого есть известная функция  $\mathbf{r}_0(t)$ . Результат скалярного произведения исходного уравнения на вектор  $n$  получается при помощи разложения этого векторного уравнения в базисе  $\mathbf{e}^{(i)}$  и сохранения только уравнения для третьей координаты. На рис. (3.9) показана механическая система с ци-

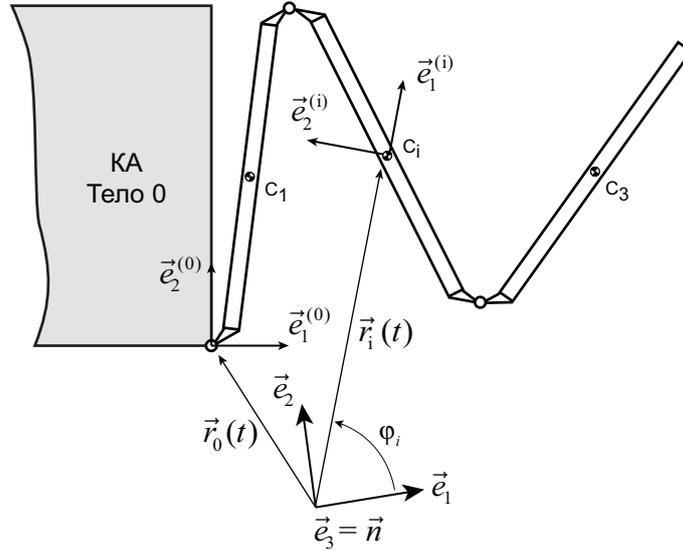


Рис. 3.9: Система с цилиндрическими шарнирами.

линдрическими шарнирами. В качестве обобщенных координат выбран угол  $\phi_i$  между  $e_1$  и  $e_1^{(i)}$ . Преобразование координат задается матрицей  $A^i$ :

$$\mathbf{e}^{(i)} = \mathbf{A}^i \mathbf{e}, \quad i = 1, \dots, n,$$

элементы которой определяются следующим образом:

$$\mathbf{A}^i = \begin{pmatrix} \cos \phi_i & \sin \phi_i & 0 \\ -\sin \phi_i & \cos \phi_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.34)$$

Матрица преобразования координат из системы  $\mathbf{e}^{(j)}$  в систему  $\mathbf{e}^{(i)}$  есть результат двух последовательных преобразований:

$$\mathbf{e}^{(i)} = \mathbf{A}^{ij} \mathbf{e}^{(j)}, \quad i = 1, \dots, n,$$

где

$$\mathbf{A}^{ij} = \mathbf{A}^i \mathbf{A}^{jT} = \begin{pmatrix} \cos(\phi_i - \phi_j) & \sin(\phi_i - \phi_j) & 0 \\ -\sin(\phi_i - \phi_j) & \cos(\phi_i - \phi_j) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Матрицы координат для  $K_i$ ,  $d_{ij}$ ,  $b_{i0}$ ,  $\dot{\omega}_i$ ,  $M_i$ ,  $Y_a$  ( $i, j, a = 1, \dots, n$ ) в базисе  $\mathbf{e}^{(i)}$  записываются в виде:

$$\mathbf{K}_i = \begin{pmatrix} K_{i1} & -K_{i12} & -K_{i13} \\ -K_{i12} & K_{i2} & -K_{i23} \\ -K_{i13} & -K_{i23} & K_{i3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}_{ij} = \begin{pmatrix} d_{ij} \cos a_{ij} \\ d_{ij} \sin a_{ij} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b}_{i0} = \begin{pmatrix} b_{i0} \cos \beta_i \\ b_{i0} \sin \beta_i \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\omega}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi}_i \end{pmatrix}, \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\phi}_i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Y_a \end{pmatrix}.$$

Скаляры  $d_{ij}$  и  $b_{ij}$  представляют собой абсолютные значения проекций этих векторов на плоскость перпендикулярную вектору  $\mathbf{n}$ , положение этих векторов в плоскости задается углами  $a_{ij}$  и  $\beta_i$ . Уравнения движения системы с цилиндрическими шарнирами, с учетом того, что:

$$\boldsymbol{\omega}_j \times (\boldsymbol{\omega}_j \times b_{j0}) = -\omega_j^2 b_{j0}$$

и

$$\boldsymbol{\omega}_j \times (\boldsymbol{\omega}_j \times d_{ji}) = -\omega_j^2 d_{ji}$$

будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n \mathbf{K}_{ij} \dot{\omega}_j = & \mathbf{M}_i - \tilde{\omega}_i \mathbf{K}_i \omega_i + M \left( \sum_{j:s_i < s_j} \dot{\phi}_j^2 \tilde{\mathbf{d}}_{ij} \mathbf{A}^{ij} \mathbf{b}_{j0} + \right. \\
& \left. + \tilde{\mathbf{b}}_{i0} (\ddot{\mathbf{r}}_0 + \sum_{j:s_j < s_i} \dot{\phi}_j^2 \mathbf{A}^{ij} \mathbf{d}_{ij}) \right) - \\
& - \sum_{j:s_i < s_j} \tilde{\mathbf{d}}_{ij} \mathbf{A}^i \mathbf{F}_j + \sum_{a=1}^n S_{ia} \mathbf{Y}_a, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.35)
\end{aligned}$$

Подматрицы  $\mathbf{K}_{ij}$  имеют вид:

$$\mathbf{K}_{ij} = \begin{cases} \mathbf{K}_i, & i = j, \\ M(\mathbf{b}_{j0}^T \mathbf{A}^{ji} \mathbf{d}_{ij} \mathbf{E} - \mathbf{A}^{ij} \mathbf{b}_{j0} \mathbf{d}_{ij}^T), & s_i < s_j, \\ M(\mathbf{d}_{ji}^T \mathbf{A}^{ji} \mathbf{b}_{i0} \mathbf{E} - \mathbf{A}^{ij} \mathbf{d}_{ji} \mathbf{b}_{i0}^T), & s_j < s_i, \\ 0, & \text{в других случаях,} \end{cases}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (3.36)$$

Каждое слагаемое системы (3.35) представляет собой матрицу-столбец из трех элементов. Для интегрирования необходим только третий элемент, описывающий движение системы вокруг оси, задаваемой вектором  $p$ . Рассмотрим процедуру получения для наиболее сложных слагаемых. Рассмотрим произведение  $\mathbf{K}_{ij} \dot{\omega}_j$ . Определим  $K_{ij}$  для случая  $s_i < s_j$ :

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^{ji} \mathbf{d}_{ij} = & d_{ij} \begin{bmatrix} \cos(\phi_j - \phi_i) \cos a_{ij} + \sin(\phi_j - \phi_i) \sin a_{ij} \\ -\sin(\phi_j - \phi_i) \cos a_{ij} + \cos(\phi_j - \phi_i) \sin a_{ij} \end{bmatrix} = \\
= & d_{ij} \begin{bmatrix} \cos(\phi_j - \phi_i + a_{ij}) \\ \sin(\phi_j - \phi_i + a_{ij}) \end{bmatrix}. \quad (3.37)
\end{aligned}$$

Умножая далее, получим элемент  $\mathbf{b}_{j0}^T \mathbf{A}^{ji} \mathbf{d}_{ij} \mathbf{E}$  с индексом (3,3):

$$\begin{aligned}
b_{j0} d_{ij} (\cos \beta_j \cos(\phi_i - \phi_j + a_{ij}) + \sin \beta_j \sin(\phi_i - \phi_j + a_{ij})) = \\
= b_{j0} d_{ij} \cos(\phi_i - \phi_j + a_{ij} - \beta_j). \quad (3.38)
\end{aligned}$$

Элемент (3,3) второго слагаемого  $\mathbf{A}^{ij} \mathbf{b}_{j0} \mathbf{d}_{ij}^T$  обращается в нуль, так как весь третий столбец матрицы  $\mathbf{b}_{j0} \mathbf{d}_{ij}^T$  содержит только нули. Следовательно, для  $s_i < s_j$ :

$$(\mathbf{K}_{ij} \dot{\omega}_j)_{(3,3)} = M b_{j0} d_{ij} \cos(\phi_i - \phi_j + a_{ij} - \beta_j) \ddot{\phi}_j.$$

Таким образом, выражение для  $K_{ij}\dot{\omega}_j, i \neq j$  определяется следующим образом:

$$\mathbf{K}_{ij}\dot{\omega}_j = \begin{cases} \mathbf{K}_i, & i = j, \\ Mb_{j0}d_{ij} \cos(\phi_i - \phi_j + a_{ij} - \beta_j)\ddot{\phi}_j, & s_i < s_j, \\ Mb_{i0}d_{ji} \cos(\phi_i - \phi_j - a_{ij} + \beta_j)\ddot{\phi}_j, & s_j < s_i, \\ 0, & \text{в других случаях,} \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (3.39)$$

Раскроем выражение  $\dot{\phi}_j^2 \tilde{d}_{ij} A^{ij} b_{j0}$ :

$$A^{ij} b_{j0} = b_{j0} [\cos(\phi_i - \phi_j - \beta_j) - \sin(\phi_i - \phi_j - \beta_j)],$$

что, позволяет определить третий элемент  $\dot{\phi}_j^2 \tilde{d}_{ij} A^{ij} b_{j0}$ :

$$(\dot{\phi}_j^2 \tilde{d}_{ij} A^{ij} b_{j0})_{(3,3)} = -d_{ij} b_{j0} \sin(\phi_i - \phi_j + a_{ij} - \beta_j) \dot{\phi}_j^2.$$

Уравнения движения механической системы примут вид:

$$\sum_{j=1}^n (A_{ij} \ddot{\phi}_j + B_{ij} \dot{\phi}_j^2) = R_i + \sum_{a=1}^n S_{ia} Y_a, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.40)$$

где:

$$A_{ij} = \begin{cases} K_{i3}, & i = j, \\ Md_{ij} b_{j0} \cos(\phi_i - \phi_j + \alpha_{ij} \beta_j), & s_i < s_j, \\ Md_{ji} b_{i0} \cos(\phi_i - \phi_j - \alpha_{ji} \beta_i), & s_j < s_i, \\ 0, & \text{в других случаях,} \end{cases}$$

$$B_{ij} = \begin{cases} Md_{ij} b_{j0} \cos(\phi_i - \phi_j + \alpha_{ij} \beta_j), & s_i < s_j, \\ Md_{ji} b_{i0} \cos(\phi_i - \phi_j - \alpha_{ji} \beta_i), & s_j < s_i, \\ 0, & \text{в других случаях,} \end{cases}$$

$$R_i = M_i - Mb_{i0}(\ddot{r}_{01} \sin(\phi_i - \beta_i) - \ddot{r}_{02} \cos(\phi_i + \beta_i) + \sum_{j:s_i \leq s_j} d_{ij} (F_{ji} \sin(\phi_i + a_{ij}) - F_{j2} \cos(\phi_i + a_{ij}))).$$

Уравнение можно записать в матричной форме:

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{\phi}_2 \\ \dots \\ \ddot{\phi}_{n-1} \\ \ddot{\phi}_n \end{pmatrix} + \mathbf{B} \begin{pmatrix} \dot{\phi}_1^2 \\ \dot{\phi}_2^2 \\ \dots \\ \dot{\phi}_{n-1}^2 \\ \dot{\phi}_n^2 \end{pmatrix} = \mathbf{S}\mathbf{Y} + \mathbf{R}. \quad (3.41)$$

Матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  симметричны. Этот факт позволит сократить время решения системы линейных уравнений для определения ускорений, при использовании специальных численных методов решения СЛУ ориентированных на симметрические матрицы коэффициентов.

### 3.2.3 Системы не связанные с внешним телом

Рассмотрим механические системы в которых отсутствует тело 0, совершающее заданное движения. Примером такой системы – система раскрытия солнечных батарей в том случае если учитывается и влияние процесса раскрытия на движение КА. При анализе таких систем необходимо выбрать систему координат  $\mathbf{e}^{(0)}$  относительно которой будет рассматриваться движение всей системы. Поскольку в системе отсутствует тело 0, и следовательно, шарнир 1, связанный с телом 0, принимаем что вектор  $\mathbf{c}_{11}$ , соединяющий центр масс тела 1 с первым шарниром равен 0:

$$\mathbf{c}_{11} = 0.$$

Таким образом, предполагается что на теле 1, в его центре масс, располагается фиктивный шарнир. Уравнения движения системы имеют следующий вид:

$$\begin{cases} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \sum_{a=0}^n S_{ia} \mathbf{X}_a^c, \\ \dot{\mathbf{L}}_i = \mathbf{M}_i + S_{ia} (\mathbf{c}_{ia} \times \mathbf{X}_a^c + \mathbf{Y}_a) \end{cases}, i = 1, \dots, n. \quad (3.42)$$

Складывая все  $n$  первых уравнений системы (3.42) получим:

$$\sum_{i=1}^n m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i,$$

которое, с учетом определения центра масс системы, можно переписать в виде

$$\ddot{\mathbf{r}}_C = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i. \quad (3.43)$$

Введем вектор  $\mathbf{R}_i$ , как радиус-вектор центра масс тела  $i$  относительно центра масс системы. Первое уравнение системы (3.42) принимает следующий вид:

$$m_i (\ddot{\mathbf{R}}_i + \ddot{\mathbf{r}}_C) = \mathbf{F}_i + \sum_{a=1}^n S_{ia} \mathbf{X}_a^c,$$

или учетом выражения для ускорения центра масс:

$$\begin{aligned} m_i \ddot{\mathbf{R}}_i &= \mathbf{F}_i - m_i/M \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_j + \sum_{a=1}^n S_{ia} \mathbf{X}_a^c = \\ &= \sum_{j=1}^n \mu_{ij} \mathbf{F}_j + \sum_{a=1}^n S_{ia} \mathbf{X}_a^c, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (3.44)$$

где  $\mu_{ij}$  безразмерные величины:

$$\mu_{ij} = \delta_{ij} - \frac{m_i}{M}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (3.45)$$

Матрицу  $\mu$ , составленную из элементов  $\mu_{ij}$  можно представить в виде:

$$\mu = \mathbf{E} - \frac{1}{M} (\mathbf{m} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T). \quad (3.46)$$

В матричной форме последнее дифференциальное уравнение имеет следующий вид:

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{R}} = \mu \mathbf{F} + \mathbf{S} \mathbf{X}^c. \quad (3.47)$$

Из этого уравнения выразим силы реакции  $\mathbf{X}^c$ , умножив его слева на  $\mathbf{T}$ :

$$\mathbf{X}^c = \mathbf{T}(\mathbf{m} \ddot{\mathbf{R}} - \mu \mathbf{F}).$$

Вторую группу уравнений системы (3.42) также перепишем в матричной форме:

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M} + \mathbf{C} \times \mathbf{X}^c + \mathbf{S} \mathbf{Y},$$

и подставим в него выражение для сил реакции:

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M} + \mathbf{C} \times \mathbf{T}(\mathbf{m} \ddot{\mathbf{R}} - \mu \mathbf{F}) + \mathbf{S} \mathbf{Y}. \quad (3.48)$$

Полученное матричное уравнение соответствует системе  $3n$  скалярных дифференциальных уравнений, к которым необходимо добавить 3 скалярных дифференциальных уравнения движения центра масс механической системы (3.43). Найдем выражение для  $R$ . С учетом того, что  $\mathbf{c}_{11} = 0$  запишем следующее соотношение, см. рисунок 3.10:

$$\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_1 = - \sum_{j=1}^n \mathbf{d}_{ji} = - \sum_{j=1}^n (\mathbf{C} \mathbf{T})_{ji}.$$

В матричной форме эти соотношения имеют следующий вид:

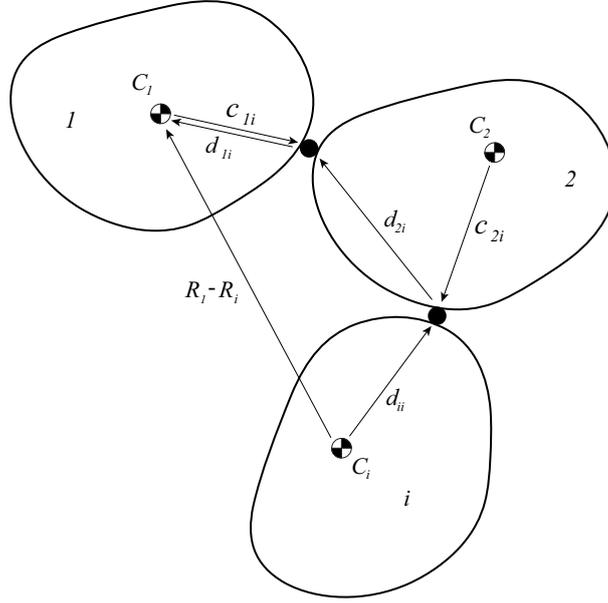


Рис. 3.10: Сумма векторов  $d_{ji}$

$$\mathbf{R} - \mathbf{R}_1 \mathbf{1}_n = -(\mathbf{C}\mathbf{T})^T \mathbf{1}_n. \quad (3.49)$$

Умножим последнее уравнение слева на  $\mu^T$ :

$$\mu^T \mathbf{R} - \mu^T \mathbf{R}_1 \mathbf{1}_n = -\mu^T (\mathbf{C}\mathbf{T})^T \mathbf{1}_n. \quad (3.50)$$

Преобразуем первое слагаемое следующим образом:

$$(\mu^T \mathbf{R})_i = \sum_{j=1}^n \mu_{ji} \mathbf{R}_j = \sum_{j=1}^n (\delta_{ij} - \frac{m_j}{M}) \mathbf{R}_j = \mathbf{R}_i - \frac{\sum_{j=1}^n m_j \mathbf{R}_j}{M} = \mathbf{R}_i. \quad (3.51)$$

Рассмотрим произведение  $\mu^T \mathbf{1}_n$  вот втором слагаемом. Из (3.46) следует, что результатом этого произведения есть 0, действительно:

$$\begin{aligned} (\mathbf{E} - \frac{1}{M} (\mathbf{m} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T))^T \mathbf{1}_n &= \\ &= \left( \mathbf{E} - \frac{1}{M} \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & \dots & m_n \\ \vdots & & & \\ m_1 & m_2 & \dots & m_n \end{pmatrix} \right) \mathbf{1}_n = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

После преобразований из (3.50) выразим  $\mathbf{R}$ :

$$\mathbf{R} = -(\mathbf{C}\mathbf{T}\mu)^T \mathbf{1}_n, \quad (3.53)$$

которое подставим в (3.48):

$$\dot{\mathbf{L}} + \mathbf{C} \times \mathbf{Tm}(\ddot{\mathbf{C}}\mathbf{T}\mu)^T \mathbf{1}_n + \mathbf{C}\mathbf{T}\mu \times \mathbf{F} = \mathbf{M} + \mathbf{S}\mathbf{Y}. \quad (3.54)$$

Для дальнейших преобразований необходимо доказать следующее тождество:

$$\mu \mathbf{m} \mu^T \equiv \mathbf{m} \mu^T.$$

Рассмотрим разность  $\mu \mathbf{m} \mu^T - \mathbf{m} \mu^T$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{m} \mu^T - \mu \mathbf{m} \mu^T &= \mathbf{m} \left( \mathbf{E} - \frac{1}{M} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T \mathbf{m} \right) - \left( \mathbf{E} - \frac{1}{M} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T \mathbf{m} \right) \mathbf{m} \left( \mathbf{E} - \frac{1}{M} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T \mathbf{m} \right) = \\ &= \mathbf{m} \mathbf{E} - \mathbf{m} \frac{1}{M} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T \mathbf{m} - \mathbf{E} \mathbf{m} + \mathbf{m} \frac{1}{M} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T \mathbf{m} + \\ &\quad + \frac{1}{M} \mathbf{m} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T \mathbf{m} - \frac{1}{M} \mathbf{m} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T \mathbf{m} \frac{1}{M} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T \mathbf{m} = \\ &= \frac{1}{M} \mathbf{m} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T \mathbf{m} - \frac{1}{M^2} \mathbf{m} \mathbf{1}_n \underbrace{\mathbf{1}_n^T \mathbf{m} \mathbf{1}_n}_M \mathbf{1}_n^T \mathbf{m} \equiv 0. \end{aligned} \quad (3.55)$$

С учетом доказанного тождества, уравнение (3.54) примет вид:

$$\dot{\mathbf{L}} + (\mathbf{C}\mathbf{T}\mu) \times \mathbf{m}(\ddot{\mathbf{C}}\mathbf{T}\mu)^T \mathbf{1}_n + \mathbf{C}\mathbf{T}\mu \times \mathbf{F} = \mathbf{M} + \mathbf{S}\mathbf{Y}. \quad (3.56)$$

Рассмотрим элементы матрицы  $(\mathbf{C}\mathbf{T}\mu)_{ij}$ , которые подобны элементам  $\mathbf{d}_{ij}$ :

$$(\mathbf{C}\mathbf{T}\mu)_{kj} = \sum_{k=1}^n \mathbf{d}_{ik} \mu_{ik}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Подставим выражение для  $\mathbf{d}_{ik}$  и  $\mu_{ik}$ :

$$(\mathbf{C}\mathbf{T}\mu)_{ij} = \sum_{k=1}^n (\mathbf{b}_{i0} - \mathbf{b}_{ik}) \left( \delta_{kj} - \frac{m_k}{M} \right) = -\mathbf{b}_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (3.57)$$

С учетом последнего выражения, радиус-вектор  $\mathbf{R}_i$  (3.53) перепишем следующим образом:

$$\mathbf{R}_i = \sum_{j=1}^n \mathbf{b}_{ji}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.58)$$

Далее рассмотрим элементы матрицы  $(\mathbf{C}\mathbf{T}\mu) \times \mathbf{m}(\ddot{\mathbf{C}}\mathbf{T}\mu)^T$ , элементы которой обозначим как  $\mathbf{g}_{ij}$

$$\mathbf{g}_{ij} = \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{b}_{ik} \times \ddot{\mathbf{b}}_{jk}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (3.59)$$

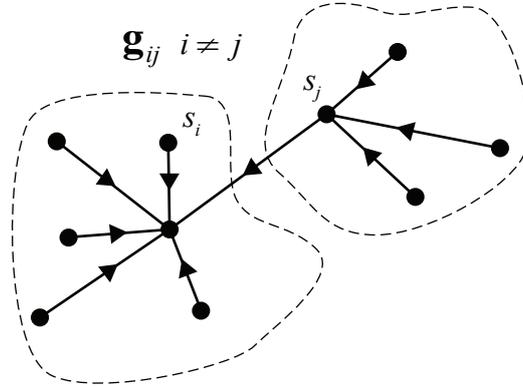


Рис. 3.11: Множества индексов I и II

Упростим последнее выражение. Для этого разобьем граф механической системы на две части, первая часть содержит вершину  $s_i$  – подграф I, вторая – вершину  $s_j$  – подграф II. Для всех  $k \in I$  справедливо тождество  $\mathbf{b}_{jk} = \mathbf{b}_{ji}$ , а для всех  $k \in II$  справедливо  $\mathbf{b}_{ik} = \mathbf{b}_{ij}$ . Представим  $\mathbf{g}_{ij}$  следующим образом:

$$\mathbf{g}_{ij} = \left( \sum_{k \in I} m_k \mathbf{b}_{ik} \right) \times \ddot{\mathbf{b}}_{ji} + \mathbf{b}_{ij} \times \sum_{k \in II} m_k \ddot{\mathbf{b}}_{jk}, \quad i \neq j.$$

Преобразуем содержимое скобки первого слагаемого:

$$\sum_{k \in I} m_k \mathbf{b}_{ik} = \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{b}_{ik} - \sum_{k \in II} m_k \mathbf{b}_{ik},$$

или с учетом тождества  $\sum_{j=1}^n \mathbf{b}_{ij} m_j = 0$  и  $\mathbf{b}_{ik} = \mathbf{b}_{ij}$ :

$$\sum_{k \in I} m_k \mathbf{b}_{ik} = -\mathbf{b}_{ij} \sum_{k \in II} m_k.$$

Аналогично

$$\sum_{k \in II} m_k \ddot{\mathbf{b}}_{jk} = -\ddot{\mathbf{b}}_{ij} \sum_{k \in I} m_k.$$

Полученные результаты позволяют переписать выражение для  $\mathbf{g}_{ij}$  в следующем виде:

$$\mathbf{g}_{ij} = -\left( \sum_{k \in I} m_k + \sum_{k \in II} m_k \right) \mathbf{b}_{ij} \times \ddot{\mathbf{b}}_{ji} = -M \mathbf{b}_{ij} \times \ddot{\mathbf{b}}_{ji}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j.$$

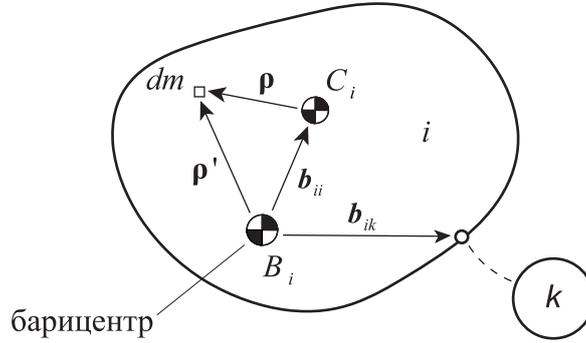


Рис. 3.12: К определению момента импульса относительно барицентра.

Раскроем матричное уравнение движения (3.56):

$$\dot{\mathbf{L}}_i + \sum_{j=1}^n \mathbf{g}_{ij} - \sum_{j=1}^n \mathbf{b}_{ij} \times \mathbf{F}_j = \mathbf{M}_i + \sum_{a=1}^n S_{ia} \mathbf{Y}_a, \quad i = 1, \dots, n,$$

которые с учетом полученных выражений для  $\mathbf{g}_{ij}$ :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{L}}_i + \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{b}_{ik} \times \ddot{\mathbf{b}}_{ik} - M \sum_{j=1}^n \mathbf{b}_{ij} \times \ddot{\mathbf{b}}_{ji} - \sum_{j=1}^n \mathbf{b}_{ij} \times \mathbf{F}_j = \\ = \mathbf{M}_i + \sum_{a=1}^n S_{ia} \mathbf{Y}_a, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Рассмотрим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \int_{m_i} \rho' \times \ddot{\rho}' dm = \int_{m_i} (\rho + \mathbf{b}_{ii}) \times (\ddot{\rho} + \ddot{\mathbf{b}}_{ii}) dm = \\ = \int_{m_i} \rho \times \ddot{\rho} dm + m_i \mathbf{b}_{ii} \times \ddot{\mathbf{b}}_{ii} = \dot{\mathbf{L}}_i + m_i \mathbf{b}_{ii} \times \ddot{\mathbf{b}}_{ii}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Сравнивая последнее выражение отличается от первых двух слагаемых (3.60) на  $\sum_{k=1, k \neq i}^n m_k \mathbf{b}_{ik} \times \ddot{\mathbf{b}}_{ik}$ . Следует отметить, что первые два слагаемых (3.60) представляют собой абсолютную производную по времени от момента количества абсолютного движения дополненного тела  $i$  относительно его барицентра. Сумма  $\sum_{k=1, k \neq i}^n m_k \mathbf{b}_{ik} \times \ddot{\mathbf{b}}_{ik}$  дает вклад точечных

масс  $m_k$ . Перепишем уравнение движения (3.60) в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_i^* \cdot \dot{\omega}_i + \omega_i \times \mathbf{K}_i^* \cdot \omega_i - M \sum_{j=1, j \neq i}^n \mathbf{b}_{ij} \times \ddot{\mathbf{b}}_{ji} - \sum_{j=1}^n \mathbf{b}_{ij} \times \mathbf{F}_j = \\ = \mathbf{M}_i + \sum_{a=1}^n S_{ia} \mathbf{Y}_a, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.62)$$

где  $\omega_i$  – абсолютная угловая скорость тела  $i$ ;  $\mathbf{K}_i^*$  – тензор инерции дополненного тела  $i$  относительно его барицентра, который определяется следующим образом:

$$\mathbf{K}_i^* = \mathbf{J}_i + \sum_{k=1}^n m_k (\mathbf{b}_{ik}^2 \mathbf{E} - \mathbf{b}_{ik} \mathbf{b}_{ik}), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.63)$$

Подставим в последнее выражение выражения для векторов  $\ddot{\mathbf{b}}_{ji}$ :

$$\ddot{\mathbf{b}}_{ji} = \dot{\omega}_j \times \mathbf{b}_{ji} + \omega_j \times (\omega_j \times \mathbf{b}_{ji}),$$

получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_i^* \cdot \dot{\omega}_i - M \sum_{j=1, j \neq i}^n \mathbf{b}_{ij} \times (\dot{\omega}_j \times \mathbf{b}_{ji}) = \\ = \mathbf{M}'_i + \mathbf{M}_i + \sum_{a=1}^n S_{ia} \mathbf{Y}_a, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.64)$$

где:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}'_i = -\omega_i \times \mathbf{K}_i^* \cdot \omega_i + M \sum_{j=1, j \neq i}^n \mathbf{b}_{ij} \times (\omega_j \times (\omega_j \times \mathbf{b}_{ji})) + \\ + \sum_{j=1}^n \mathbf{b}_{ij} \times F_j, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Двойное векторное произведение в правой части последнего уравнения перепишем в матричной форме:

$$\mathbf{b}_{ij} \times (\dot{\omega}_j \times \mathbf{b}_{ji}) = (\mathbf{b}_{ji} \cdot \mathbf{b}_{ij} \mathbf{E} - \mathbf{b}_{ji} \mathbf{b}_{ij}) \cdot \dot{\omega}_j.$$

Определим матрицу:

$$\mathbf{K}_{ij} = \begin{cases} \mathbf{K}_i^*, & i = j, \\ M(\mathbf{b}_{ji} \mathbf{b}_{ij} - \mathbf{b}_{ji} \cdot \mathbf{b}_{ij} \mathbf{E}), & i \neq j, \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (3.66)$$

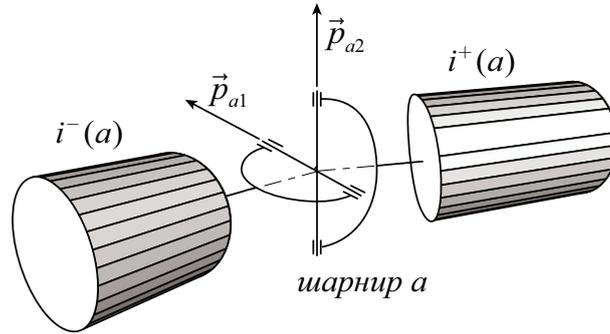


Рис. 3.13: Универсальный шарнир

при помощи которой перепишем уравнение движения в следующей форме:

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{K}_{ij} \cdot \dot{\omega}_j = \mathbf{M}'_i + \mathbf{M}_i + \sum_{a=1}^n S_{ia} \mathbf{Y}_a, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.67)$$

Получены уравнения движения механических систем твердых тел соединенных сферическими шарнирами. Структура системы не имеет замкнутых циклов. Полученные уравнения движения предназначены для моделирования систем в которых отсутствует базовое тело и шарнир движение которого является известной функцией времени. К уравнениям движения (3.67) необходимо добавить три уравнения движения центра масс всей системы (3.43).

### 3.3 Системы с цилиндрическими и универсальными шарнирами

Полученные уравнения для систем со сферическими шарнирами можно использовать для получения уравнений движения систем, содержащих цилиндрические и универсальные шарниры.

Универсальный шарнир состоит из двух цилиндрических шарниров, оси которых пересекаются под прямым углом. Такие типы шарниров широко распространены в технике, в частности в механике роботов.

Сферический шарнир никак не ограничивает относительную угловую скорость двух смежных тел. В цилиндрическом шарнире относительная угловая скорость должна лежать на оси вращения шарнира. В универсальном шарнире эта угловая скорость должна лежать в плоскости, образованной осями цилиндрических шарниров, образующих универсальный шарнир.

Для преобразования сферического шарнира в универсальный к активным моментам, необходимо добавить момент реакции, ортогональный плоскости, образованной осями универсального шарнира, то есть добавить одну геометрическую связь. Цилиндрический шарнир требует добавления двух геометрических связей и следовательно двух моментов перпендикулярных оси вращения. Учитывая вышесказанное, для систем с универсальными и цилиндрическими шарнирами уравнение (3.32) нужно записать в виде:

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{K}_{ij} \dot{\omega}_j = M'_i + M_i + \sum_{a=1}^n \mathbf{S}_{ia} (\mathbf{Y}_a + \mathbf{Y}_a^c), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.68)$$

где  $\mathbf{Y}_a^c$  - дополнительные моменты реакций в цилиндрических и универсальных шарнирах. Уравнение (3.68) следующую матричную форму:

$$\mathbf{K} \dot{\omega} = \mathbf{M}' + \mathbf{M} + \mathbf{S} (\mathbf{Y} + \mathbf{Y}^c). \quad (3.69)$$

Как было отмечено выше, угловые скорости смежных тел, соединенных цилиндрическими или универсальными шарнирами уже не будут независимыми, поэтому далее необходимо рассмотреть кинематику движения смежных тел друг относительно друга.

В качестве обобщенных координат будем рассматривать углы поворота тел вокруг осей цилиндрического и универсального шарниров. Для цилиндрического шарнира  $a$  необходим один угол  $\phi_{a1}$ , для универсального шарнира - два угла  $\phi_{a1}$  и  $\phi_{a2}$ , а для сферического шарнира три  $\phi_{a1}$ ,  $\phi_{a2}$ ,  $\phi_{a3}$ . Как и прежде, на каждом теле зафиксирован произвольно ориентированный базис  $\mathbf{e}^{(i)}$ . Обозначим буквой  $\Omega_a$  угловую скорость тела  $i^-(a)$  относительно  $i^+(a)$ . Эту угловую скорость можно выразить через обобщенные скорости следующим образом:

$$\Omega_a = \sum_{i=1}^{n_a} \mathbf{p}_{ai} \dot{\phi}_{ai}, \quad a = 1, \dots, n, \quad (3.70)$$

где  $n_a$  - число степеней свободы в шарнире;  $\mathbf{p}_{ai}$  - единичные векторы, направленные вдоль осей вращения; для цилиндрического шарнира  $n_a = 1$  и существует один вектор  $\mathbf{p}_{ai}$  вокруг которого происходит вращение смежных тел  $i^+(a)$  и  $i^-(a)$ . Рассмотрим угловое ускорение тела  $i^-(a)$  относительно  $i^+(a)$ , которую обозначим как  $\dot{\Omega}_a$ :

$$\dot{\Omega}_a = \sum_{i=1}^{n_a} \left( \mathbf{p}_{ai} \ddot{\phi}_{ai} + \sum_{j=1}^{n_a} \frac{\partial \mathbf{p}_{ai}}{\partial \phi_{aj}} \dot{\phi}_{ai} \dot{\phi}_{aj} \right), \quad a = 1, \dots, n, \quad (3.71)$$

выделив члены со старшими производными, получим:

$$\overset{\circ}{\Omega}_a = \sum_{i=1}^{n_a} \mathbf{p}_{ai} \ddot{\phi}_{ai} + \omega_a, \quad a = 1, \dots, n, \quad (3.72)$$

где

$$\omega_a = \sum_{i=1}^{n_a} \sum_{j=1}^{n_a} \frac{\partial \mathbf{p}_{ai}}{\partial \phi_{aj}} \dot{\phi}_{ai} \dot{\phi}_{aj}, \quad a = 1, \dots, n.$$

Для полного определения кинематики относительного движения смежных тел необходимо знать матрицы преобразования координат  $\mathbf{G}_a$  от одного базиса к другому. Эта матрица является известной функцией обобщенных координат:

$$\mathbf{e}^{i^-(a)} = \mathbf{G}_a \mathbf{e}^{i^+(a)}, \quad a = 1, \dots, n. \quad (3.73)$$

Далее рассмотрим кинематику движения тел относительно инерциального пространства. Относительная и абсолютные скорости связаны следующим отношением:

$$\Omega_a = \omega_{i^-(a)} - \omega_{i^+(a)} \quad a = 1, \dots, n. \quad (3.74)$$

Последнее выражение можно переписать с использованием матрицы инцидентности  $\mathbf{S}$ :

$$\Omega_a = - \sum_{i=0}^n S_{ia} \omega_i = -S_{0a} \omega_0 - \sum_{i=1}^n S_{ia} \omega_i \quad a = 1, \dots, n, \quad (3.75)$$

или в матричной форме:

$$\Omega = -\omega_0 \mathbf{S}_0^T - \mathbf{S}^T \omega_0, \quad (3.76)$$

где  $\Omega = [\Omega_1 \dots \Omega_n]^T$  и  $\omega = [\omega_1 \dots \omega_n]^T$  - матрицы-столбцы относительных и абсолютных скоростей. Учитывая тождество (1.5), умножим последнее выражение слева на  $\mathbf{T}^T$ , что позволит выразить матрицу абсолютных угловых скоростей:

$$\omega = -\mathbf{T}^T \Omega + \omega_0 \mathbf{1}_n \quad (3.77)$$

и угловую скорость каждого тела:

$$\omega_i = - \sum_{a=1}^n T_{ai} \Omega_a + \omega_0, \quad a = 1, \dots, n. \quad (3.78)$$

Продифференцировав (3.78) получим абсолютное угловое ускорение:

$$\dot{\omega}_i = - \sum_{a=1}^n T_{ai} (\overset{\circ}{\Omega}_a + \omega_a^*) + \omega_0, \quad a = 1, \dots, n, \quad (3.79)$$

где

$$\omega_a^* = \omega_{i-(a)} \times \Omega_a \quad a = 1, \dots, n. \quad (3.80)$$

Уравнение можно переписать в матричной форме:

$$\dot{\omega} = -\mathbf{T}^T (\overset{\circ}{\Omega} + \omega^*) + \dot{\omega}_0 \mathbf{1}_n. \quad (3.81)$$

Матрица-столбец относительных угловых ускорений определяется следующим образом:

$$\overset{\circ}{\Omega} = \mathbf{p}^T \ddot{\phi} + \omega, \quad (3.82)$$

где  $\ddot{\phi} = [\ddot{\phi}_{11}, \dots, \ddot{\phi}_{1n_1}, \dots, \ddot{\phi}_{n_1}, \dots, \ddot{\phi}_{nnn}]^T$ ;  $\mathbf{p}$  - блочно-диагональная матрица:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_{11} \dots p_{1n_1} & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & p_{21} \dots p_{2n_2} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \dots & p_{n1} \dots p_{nnn} & \dots \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

Каждый столбец блочной матрицы  $\mathbf{p}$  соответствует одному шарниру, а количество строк равно суммарному числу степеней свободы во всех шарнирах. Подставив выражение для относительного углового ускорения в (3.3) получим:

$$\dot{\omega} = -\mathbf{T}^T (\mathbf{p}^T \ddot{\phi} + \mathbf{f}) + \dot{\omega}_0 \mathbf{1}_n, \quad (3.84)$$

где  $f = \omega + \omega^*$ . Подставим полученные матрицы угловых ускорений и скоростей в (3.69):

$$\mathbf{K} \left( -\mathbf{T}^T (\mathbf{p}^T \ddot{\phi} + \mathbf{f}) + \dot{\omega}_0 \mathbf{1}_n \right) = \mathbf{M}' + \mathbf{M} + \mathbf{S}(\mathbf{Y} + \mathbf{Y}^c). \quad (3.85)$$

Далее необходимо исключить из (3.85) моменты реакции  $\mathbf{Y}^c$ , для этого умножим уравнение (3.85) слева на  $\mathbf{T}$ :

$$\mathbf{Y}_c = \mathbf{T} \left( \mathbf{K} \left( -\mathbf{T}^T (\mathbf{p}^T \ddot{\phi} + \mathbf{f}) + \dot{\omega}_0 \mathbf{1}_n \right) - \mathbf{M}' - \mathbf{M} \right) - \mathbf{Y}. \quad (3.86)$$

Как было отмечено выше, моменты реакции  $\mathbf{Y}_a^c$ , составляющие матрицу  $\mathbf{Y}_c$  ортогональны соответствующим осям вращения, которые образуют цилиндрический или универсальный шарниры.

Умножив выражение на матрицу  $\mathbf{p}$  получим уравнения движения механических систем с цилиндрическими, универсальными и сферическими шарнирами:

$$\mathbf{A}\ddot{\phi} = \mathbf{B}. \quad (3.87)$$

где

$$A = (\mathbf{pT})\mathbf{K}(\mathbf{pT})^T \quad (3.88)$$

$$B = -(\mathbf{pT}) (\mathbf{K}(\mathbf{T}^T \mathbf{f} - \dot{\omega}_0 \mathbf{1}_n) + \mathbf{M}' + \mathbf{M}) - \mathbf{pY}. \quad (3.89)$$

### 3.3.1 Управляемые переменные

В реальных механических системах часто одна или несколько переменных - углов поворота управляются, то есть являются известными функциями времени. В робототехнических системах это может обеспечиваться электроприводами. Определим момент привода обеспечивающих заданное закон изменения управляемой координаты. Для решения этой задачи в первую очередь необходимо модифицировать уравнение (3.87). Без ограничения общности рассмотрим случай одной управляемой переменной  $\phi_k(t)$ . Уравнение (3.87) будет иметь вид:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1k} & \dots & A_{1N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{k1} & \dots & A_{kk} & \dots & A_{kN} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{N1} & \dots & A_{Nk} & \dots & A_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\phi}_1 \\ \dots \\ \ddot{\phi}_k \\ \dots \\ \ddot{\phi}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ \dots \\ B_k^* - M_k^m \\ \dots \\ B_N \end{bmatrix}, \quad (3.90)$$

где  $M_k^m$  - управляющий момент двигателя:

$$M_k^m = B_k^* - [A_{k1} \dots A_{kk} \dots A_{kN}] \ddot{\phi}. \quad (3.91)$$

Перепишем матричное уравнение (3.90) сгруппировав известные функции  $\ddot{\phi}_k(t)$ :

$$\mathbf{A}'\ddot{\phi}' = \mathbf{B}' - \eta\ddot{\phi}_k(t), \quad (3.92)$$

где

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1,k-1} & A_{1,k+1} & \dots & A_{1N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{k-1,1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{k+1,1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{N1} & \dots & \dots & \dots & \dots & A_{NN} \end{bmatrix},$$

$$\ddot{\phi}' = \begin{bmatrix} \ddot{\phi}_1 \\ \dots \\ \ddot{\phi}_{k-1} \\ \ddot{\phi}_{k+1} \\ \dots \\ \ddot{\phi}_N \end{bmatrix}, \mathbf{B}' = \begin{bmatrix} B_1 \\ \dots \\ B_{k-1} \\ B_{k+1} \\ \dots \\ B_N \end{bmatrix}, \eta = \begin{bmatrix} A_{1k} \\ \dots \\ A_{k-1,k} \\ A_{k+1,k} \\ \dots \\ A_{Nk} \end{bmatrix}.$$

Решив уравнение (3.92) и получив закон изменения неуправляемых переменных при помощи выражения (3.91) получим необходимый управляющий момент привода.

### 3.4 Системы тел со структурой дерева, соединенные шарнирами общего вида

#### 3.4.1 Принцип Даламбера для системы тел

В разделе рассматриваются механические системы тел со структурой дерева, соединенные шарнирами общего вида. Поскольку неизвестен ни вид шарниров, ни зависимость между кинематическими параметрами смежных тел, уравнения движения выводятся с использованием принципов аналитической механики, а именно принципа Даламбера. Принцип Даламбера (??) был сформулирован для одного тела. Для системы тел этот принцип будет иметь вид:

$$\sum_{i=1}^n \left( \delta r_i (F_i - m \ddot{r}_i) + \delta \pi_i (L_i - \dot{L}_i) \right) + \delta W = 0, \quad (3.93)$$

где производная момента количества движения  $L_i$ :

$$\dot{L}_i = J_i \dot{\omega}_i + \omega_i \times J_i \omega_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.94)$$

где  $\delta W$  - возможная работа, совершаемая в шарнирах системы, к этим силам относятся, например, силы торсионов, пружин;  $\delta r_i$  и  $\delta \pi$  - вариации положения и ориентации тела  $i$  по отношению к инерциальной системе

координат. В матричной форме принцип Даламбера для систем тел можно записать следующим образом:

$$\delta \mathbf{r}^T (\mathbf{F} - m\ddot{\mathbf{r}}) + \delta \pi^T (\mathbf{L} - \mathbf{J}\dot{\omega} - \mathbf{V}) + \delta W = 0, \quad (3.95)$$

со следующими матрицами:

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} m_1 & & \\ & \ddots & \\ & & m_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{J}_n \end{pmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{r}}_1 \\ \ddot{\mathbf{r}}_2 \\ \vdots \\ \ddot{\mathbf{r}}_n \end{pmatrix},$$

$$\delta \mathbf{r} = \begin{pmatrix} \delta \mathbf{r}_1 \\ \delta \mathbf{r}_2 \\ \vdots \\ \delta \mathbf{r}_n \end{pmatrix}, \quad \delta \pi = \begin{pmatrix} \delta \pi_1 \\ \delta \pi_2 \\ \vdots \\ \delta \pi_n \end{pmatrix}, \quad \dot{\omega} = \begin{pmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \vdots \\ \dot{\omega}_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \delta \pi_1 \\ \delta \pi_2 \\ \vdots \\ \delta \pi_n \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_1 \\ \mathbf{L}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{L}_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \delta \mathbf{V}_1 \\ \delta \mathbf{V}_2 \\ \vdots \\ \delta \mathbf{V}_n \end{pmatrix},$$

где  $\mathbf{V}_i = \omega_i \times J_i \omega_i$ . Рассмотрим как изменится запись принципа Даламбера для случая фиктивного шарнира 1, то есть когда тело 0 отсутствует и механическая система не закреплена. В этом случае радиус-вектор всякого тела  $i$  определяется следующим образом:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_C + \mathbf{R}_i,$$

где  $\mathbf{r}_C$  – радиус-вектор центра масс системы относительно полюса в инерциальном пространстве;  $\mathbf{R}_i$  – радиус-вектор центра масс тела  $i$ , проведенный из центра масс всей системы. Принцип Даламбера (3.93) примет следующий вид:

$$\sum_{i=1}^n ((\delta \mathbf{r}_C + \delta \mathbf{R}_i)(\mathbf{F}_i - m_i(\ddot{\mathbf{r}}_C + \ddot{\mathbf{R}}_i)) + \delta \pi_i(\mathbf{M}_i - \dot{\mathbf{L}}_i)) + \delta W = 0.$$

С учетом того, что  $\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{R}_i = 0$  последнее выражение примет следующий вид:

$$\delta \mathbf{r}_C \sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_C) + \sum_{i=1}^n (\delta \mathbf{R}_i (\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{R}}_i) + \delta \pi_i (\mathbf{L}_i - \dot{\mathbf{L}}_i)) + \delta W = 0.$$

Поскольку в фиктивном шарнире 1 не действуют внутренние силы и следовательно,  $\delta \mathbf{R}_i$ ,  $\delta \pi_i$  и  $\delta W$  не зависят от  $\delta \mathbf{r}_C$  последнее уравнение разделяется на два:

$$M \ddot{\mathbf{r}}_C = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i, \quad (3.96)$$

$$\sum_{i=1}^n (\delta \mathbf{R}_i (\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{R}}_i) + \delta \pi_i (\mathbf{L}_i - \dot{\mathbf{L}}_i)) + \delta W = 0. \quad (3.97)$$

Последнее уравнение имеет следующую матричную форму:

$$(\delta \mathbf{R}^T (\mathbf{F} - \mathbf{m} \ddot{\mathbf{R}}) + \delta \pi^T (\mathbf{M} - \mathbf{J} \dot{\omega}) + \delta W = 0, \quad (3.98)$$

которая отличается от уравнения (3.95) только координатными столбцами  $\ddot{\mathbf{R}}$  и  $\delta \mathbf{R}$ .

Целью дальнейших выкладок является получение зависимостей  $\delta \pi$ ,  $\delta \mathbf{r}$ ,  $\delta \mathbf{R}$  от обобщенных координат системы и их вариаций.

### 3.4.2 Кинематические отношения

Рассмотрим два смежных тела  $i^+(a)$  и  $i^-(a)$ , соединенных при помощи шарнира  $a$ , принадлежащих системе  $n$  тел. С каждым из тел жестко связаны базисы  $e^{i^-(a)}$  и  $e^{i^+(a)}$ . Для любого шарнира  $a$  положение и движение тела  $i^-(a)$  будем рассматривать относительно тела  $i^+(a)$ . Число степеней свободы относительного движения двух тел обозначим как  $n_a$ ,  $a = 1, \dots, n$ . Очевидно, что  $1 \leq n_a \leq 6$ . Положение одного тела относительно другого для каждого шарнира задается набором обобщенных координат  $q_{a1}, \dots, q_{an_a}$ . Чтобы определить положение тела  $i^-(a)$  относительно  $i^+(a)$  задать знать две величины: радиус-вектором некоторой точки в теле  $i^-(a)$ , называемой шарнирной точкой и матрицей от базиса  $e^{i^+(a)}$  к  $e^{i^-(a)}$  -  $\mathbf{G}^a$ , см. рисунок 3.14. Для уменьшения вычислительных затрат при численном анализе целесообразно положение шарнирной точки и выражение матрица перехода  $\mathbf{G}^a$  через обобщенные координаты необходимо наиболее простым образом. Именно с этой целью положение шарнирной точки относительно тела  $i^+(a)$  представим в виде суммы двух векторов: вектора  $c_{i^+(a)a}$ , жестко связанного с телом  $i^+(a)$  и вектора  $z_a$ , называемого шарнирным вектором, который выражается через обобщенные координаты  $q_{a1}, \dots, q_{an_a}$  и, может быть, время. На рисунке 3.15 показан пример построения шарнирного вектора для соединения типа цилиндрический шарнир. Рассмотрим кинематику относительного движения двух тел. Скорость любой точки тела  $i^-(a)$  относительно  $i^+(a)$  определяется двумя векторами: скоростью шарнирной точки относительно  $i^+(a)$ , которая определяется как производная  $z_a$  в базисе  $i^+(a)$

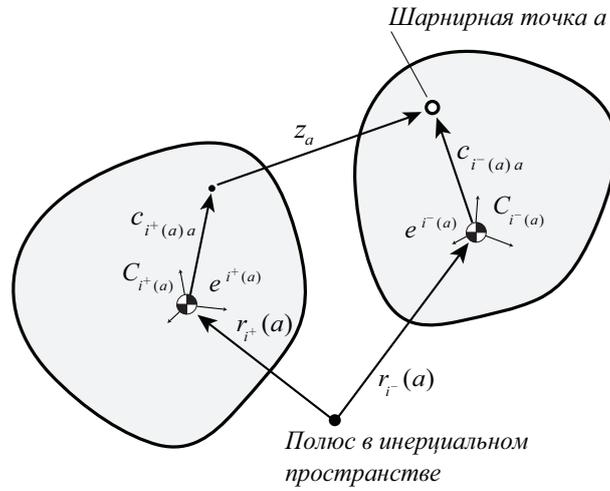


Рис. 3.14: К определению шарнирного вектора

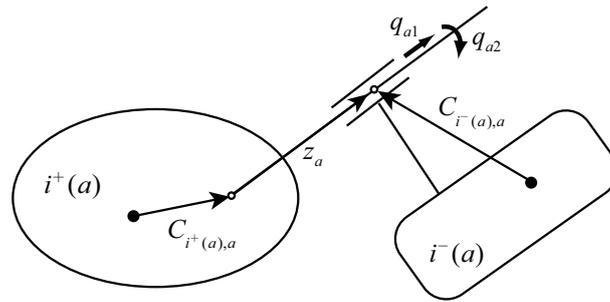


Рис. 3.15: Пример выбора шарнирного вектора

$\overset{\circ}{\mathbf{z}}_a$  и угловой скоростью тела  $i^-(a)$ , которую обозначим как  $\mathbf{\Omega}_a$ . Выражение для относительной скорости шарнирного вектора имеет вид:

$$\overset{\circ}{\mathbf{z}}_a = \sum_{i=1}^{n_a} \frac{\partial z_a}{\partial q_{ai}} \dot{q}_{ai} + \frac{\partial z_a}{\partial t}, \quad a = 1, \dots, n.$$

Введя обозначения:

$$k_{ai} = \frac{\partial z_a}{\partial q_{ai}}, \quad k_{a0} = \frac{\partial z_a}{\partial t}, \quad a = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, n_a,$$

перепишем  $\overset{\circ}{\mathbf{z}}_a$  в следующем виде:

$$\overset{\circ}{\mathbf{z}}_a = \sum_{i=1}^{n_a} k_{ai} \dot{q}_{ai} + k_{a0}, \quad a = 1, \dots, n. \quad (3.99)$$

После дифференцирования последнего выражения, получим относительное ускорение шарнирной точки:

$$\overset{\circ}{\mathbf{z}}_a = \sum_{i=1}^{n_a} k_{ai} \ddot{q}_{ai} + s_a, \quad a = 1, \dots, n, \quad (3.100)$$

где

$$s_a = \sum_{i=1}^{n_a} \left[ \sum_{j=1}^{n_a} \frac{\partial^2 z_a}{\partial q_{ai} \partial q_{aj}} \dot{q}_{ai} \dot{q}_{aj} + 2 \frac{\partial^2 z_a}{\partial a_{ai} \partial t} \dot{q}_{ai} \right] + \frac{\partial^2 z_a}{\partial t^2}, \quad a = 1, \dots, n. \quad (3.101)$$

Выражение для относительной угловой скорости  $\mathbf{\Omega}_a$  имеет следующий вид:

$$\mathbf{\Omega}_a = \sum_{i=1}^{n_a} \mathbf{p}_{ai}(q_{a1}, \dots, q_{an_a}, t) \dot{q}_{ai} + \mathbf{p}_{a0}(q_{a1}, \dots, q_{an_a}, t), \quad a = 1, \dots, n. \quad (3.102)$$

То-же в матричной форме:

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{p}^T \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{p}_0, \quad (3.103)$$

где

$$\mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix} p_{10} \\ \vdots \\ p_{n0} \end{pmatrix}.$$

В матрице  $\mathbf{q}$  собраны все  $N = \sum_{a=1}^n n_a$  обобщенных координат механической системы:

$$\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_{11} \quad \dots \quad \dot{q}_{1n_1} \quad \dot{q}_{21} \quad \dots \quad \dot{q}_{2n_2} \quad \dots \quad \dot{q}_{n1} \quad \dots \quad \dot{q}_{nn_n})^T.$$

В (3.102) последнее слагаемое  $\mathbf{p}_{a0}(q_{a1}, \dots, q_{an_a}, t)$  не равно нулю только если связи являются нестационарными - в этом случае угловая скорость отлична от нуля даже при неизменных обобщенных координатах. Если связи стационарные, то  $\mathbf{p}_{a0} = 0$  и  $\mathbf{p}_{ai}$  зависят только от обобщенных координат. Относительное угловое ускорение определяется следующим образом:

$$\overset{\circ}{\mathbf{\Omega}}_a = \sum_{i=1}^{n_a} \mathbf{p}_{ai}(q_{a1}, \dots, q_{an_a}, t) \ddot{q}_{ai} + \omega_a, \quad a = 1, \dots, n, \quad (3.104)$$

где

$$\omega_a = \sum_{i=1}^{n_a} \left[ \sum_{j=1}^{n_a} \frac{\partial p_{ai}}{\partial q_{aj}} \dot{q}_{aj} + \frac{\partial p_{ai}}{\partial t} + \frac{\partial p_{a0}}{\partial q_{ai}} \right] \dot{q}_{ai} + \frac{\partial p_{a0}}{\partial t}, \quad a = 1, \dots, n. \quad (3.105)$$

Полученные выражения для относительной линейной и угловой скорости позволяют записать вариацию положения шарнирной точки по отношению к базису  $\mathbf{e}^{i^+(a)}$ :

$$\overset{\circ}{\delta} z_a = \sum_{i=1}^{n_a} k_{ai} \delta q_{ai}, \quad a = 1, \dots, n, \quad (3.106)$$

и вариацию угловой ориентации тела  $i^-(a)$  в базисе  $\mathbf{e}^{i^+(a)}$ :

$$\delta \chi_a = \sum_{i=1}^{n_a} p_{ai} \delta q_{ai}, \quad a = 1, \dots, n. \quad (3.107)$$

Рассмотрим кинематику движения тел системы по отношению к инерциальному пространству. Абсолютная угловая скорость тела  $i$  связана с относительной скоростью следующим образом:

$$\Omega_a = \omega_{i^-(a)} - \omega_{i^+(a)}, \quad a = 1, \dots, n. \quad (3.108)$$

При помощи матрицы  $\mathbf{S}$  последнее выражение можно переписать в виде:

$$\Omega_a = - \sum_{i=0}^n S_{ia} \omega_i = -S_{0a} \omega_0 - \sum_{i=1}^n S_{ia} \omega_i, \quad a = 1, \dots, n, \quad (3.109)$$

или в матричной форме:

$$\mathbf{\Omega} = -\omega_0 \mathbf{S}_0^T - \mathbf{S}^T \boldsymbol{\omega}, \quad (3.110)$$

где

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \vdots \\ \Omega_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}.$$

Умножим (3.110) слева на  $\mathbf{T}^T$ , выразим абсолютную угловую скорость:

$$\boldsymbol{\omega} = -\mathbf{T}^T \mathbf{\Omega} + \omega_0 \mathbf{1}_n. \quad (3.111)$$

С учетом (3.103) последнее выражение можно переписать следующим образом

$$\boldsymbol{\omega} = -\mathbf{T}^T (\mathbf{p}^T \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{p}_0) + \omega_0 \mathbf{1}_n. \quad (3.112)$$

Угловая скорость каждого тела определяется следующим образом:

$$\omega_i = - \sum_{a=1}^n T_{ai} \Omega_a + \omega_0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.113)$$



Вариация  $\delta\pi_0 = 0$  поскольку положение базиса  $e^0$  есть известная функция времени, поэтому:

$$\delta\chi_a = - \sum_{i=1}^n S_{ia} \delta\pi_i, \quad a = 1, \dots, n,$$

или в матричной форме

$$\delta\chi = -\mathbf{S}^T \delta\pi. \quad (3.119)$$

Умножим последнее слева на  $\mathbf{T}^T$ :

$$\delta\pi = -\mathbf{T}^T \delta\chi.$$

Используя (3.107):

$$\delta\pi = -\mathbf{T}^T \mathbf{p}^T \delta\mathbf{q}. \quad (3.120)$$

где:

$$\delta\mathbf{q} = (\delta q_{11} \quad \dots \quad \delta q_{1n_1} \quad \delta q_{21} \quad \dots \quad \delta q_{2n_2} \quad \dots \quad \delta q_{n1} \quad \dots \quad \delta q_{nn_n})^T.$$

Рассмотрим процедуру определения ориентации тела по отношению к инерциальному пространству. Между базисом  $\mathbf{e}^{(i)}$  и базисом  $\mathbf{e}^{(0)}$ , движение которого есть известная функция времени, существует следующее соотношение:

$$\mathbf{e}^{(0)} = \mathbf{A}^i \mathbf{e}^{(i)}, \quad i = 1, \dots, n,$$

здесь матрицы преобразования координат  $\mathbf{A}_i$  определяются по следующим рекуррентными соотношениями:

$$\mathbf{A}^{i-(a)} = \mathbf{A}^{i+(a)} \mathbf{G}^{aT}, \quad \mathbf{A}^{i+(a)} = \mathbf{A}^{i-(a)} \mathbf{G}^a, \quad a = 1, \dots, n. \quad (3.121)$$

Определим выражения для  $\ddot{\mathbf{r}}$  и  $\delta\mathbf{r}$ . Рассмотрим следующее соотношение, определяющее шарнирный вектор:

$$z_a = (r_{i-(a)} + c_{i-(a)}) - (r_{i+(a)} + c_{i+(a)}), \quad a = 1, \dots, n.$$

Это выражение можно переписать с использованием элементов матрицы  $\mathbf{S}$ :

$$\mathbf{z}_a = - \sum_{i=0}^n S_{ia} (\mathbf{r}_i + \mathbf{c}_{ia}), \quad a = 1, \dots, n.$$

Поскольку вектора  $\mathbf{c}_{ia}$  жестко связаны с телами, удобно ввести следующие обозначения:

$$C_{ia} = S_{ia} c_{ia}, \quad i = 1, \dots, n, \quad a = 1, \dots, n,$$

после чего выражение для  $\mathbf{z}_a$  примет вид:

$$\mathbf{z}_a = -S_{0a}\mathbf{r}_a - C_{0a} - \sum_{i=0}^n (S_{ia}\mathbf{r}_i + \mathbf{C}_{ia}), \quad a = 1, \dots, n.$$

Последние уравнения можно объединить в одно матричное:

$$\mathbf{z} = -\mathbf{r}_0\mathbf{S}_0^T - \mathbf{C}_0^T - \mathbf{S}^T\mathbf{r} - \mathbf{C}^T\mathbf{1}_n, \quad (3.122)$$

где  $\mathbf{C}_0 = (\mathbf{C}_{01} \ \dots \ \mathbf{C}_{0n})$ , в матрице  $\mathbf{C}_0$  отличен от нуля только элемент  $\mathbf{C}_{01} = S_{01}\mathbf{c}_{01}$ , поскольку механическая система связана с телом 0 только единственным шарниром;

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{z}_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & \dots & C_{1n} \\ \vdots & & \\ C_{n1} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix}.$$

Умножив выражение (3.122) на  $\mathbf{T}^T$ , получим выражение для  $\mathbf{r}$ :

$$\mathbf{r} = -(\mathbf{C}\mathbf{T})^T\mathbf{1}_n - \mathbf{T}^T\mathbf{z} + \mathbf{r}_0\mathbf{1}_n - (\mathbf{C}_0\mathbf{T})^T. \quad (3.123)$$

Дважды продифференцируем eqrefeq:r-matrix:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -(\ddot{\mathbf{C}}\mathbf{T})^T\mathbf{1}_n - \mathbf{T}^T\ddot{\mathbf{z}} + \ddot{\mathbf{r}}_0\mathbf{1}_n - (\ddot{\mathbf{C}}_0\mathbf{T})^T. \quad (3.124)$$

Элементами матрицы  $\mathbf{C}\mathbf{T}$  являются векторы  $\mathbf{d}_{ij}$ , которые были рассмотрены ранее при выводе уравнений движения систем со сферическими шарнирами см. выражение (3.11) и рисунок 3.3. Дополнительно рассмотрим векторы, которые являются элементами матрицы  $\mathbf{C}_0\mathbf{T}$ :

$$\mathbf{d}_{0j} = (\mathbf{C}_0\mathbf{T})_j = \sum_{a=1}^n = \sum_{a=1}^n T_{aj}S_{0a}c_{0a}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.125)$$

Только один элемент  $\mathbf{d}_{0j}$  отличен от нуля поскольку произведение  $T_{aj}S_{0a}$  отлично от нуля и равно  $-1$  только для шарниров на теле 0, то есть только для шарнира 1:

$$d_{0j} = -c_{01}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.126)$$

Вторая производная по времени от  $d_{ij}$  равна:

$$\ddot{\mathbf{d}}_{ij} = -\mathbf{d}_{ij} \times \dot{\omega}_i + \omega_i \times (\omega_i \times \mathbf{d}_{ij}), \quad i = 0, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.127)$$

Первое слагаемое (3.124) после подстановки выражения для  $\ddot{\mathbf{d}}_{ij}$  примет следующий вид:

$$\begin{aligned} -(\ddot{\mathbf{C}}\mathbf{T})^T \mathbf{1}_n &= - \begin{pmatrix} \mathbf{d}_{11} \times \dot{\omega}_1 & \dots & \mathbf{d}_{n1} \times \dot{\omega}_n \\ \vdots & & \\ \mathbf{d}_{1n} \times \dot{\omega}_1 & \dots & \mathbf{d}_{nn} \times \dot{\omega}_n \end{pmatrix} \mathbf{1}_n + \mathbf{g} = \\ &= - \begin{pmatrix} \mathbf{d}_{11} & \dots & \mathbf{d}_{n1} \\ \vdots & & \\ \mathbf{d}_{1n} & \dots & \mathbf{d}_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \vdots \\ \dot{\omega}_n \end{pmatrix} + \mathbf{g}, \end{aligned} \quad (3.128)$$

где  $\mathbf{g}$  - матрица-столбец:

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{g}_n \end{pmatrix},$$

с элементами  $\mathbf{g}_i = \sum_{j=1}^n \omega_j \times (\omega_j \times \mathbf{d}_{ji})$ . Аналогично определяется последнее слагаемое в (3.124):

$$(\ddot{\mathbf{C}}_0\mathbf{T})^T = \begin{pmatrix} \dot{\omega}_0 \times \mathbf{d}_{01} + \omega_0 \times (\omega_0 \times \mathbf{d}_{01}) \\ \vdots \\ \dot{\omega}_0 \times \mathbf{d}_{0n} + \omega_0 \times (\omega_0 \times \mathbf{d}_{0n}) \end{pmatrix} = -(\dot{\omega}_0 \times \mathbf{c}_{01} + \omega_0 \times (\omega_0 \times \mathbf{c}_{01})) \mathbf{1}_n. \quad (3.129)$$

Учитывая приведенные выше преобразования, получим новое выражение для  $\ddot{\mathbf{r}}$ :

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\mathbf{C}\mathbf{T})^T \times \dot{\omega} - \mathbf{T}^T \ddot{\mathbf{z}} + \ddot{\mathbf{r}}_0 \mathbf{1}_n - (\ddot{\mathbf{C}}_0\mathbf{T})^T. \quad (3.130)$$

Элементы матрицы абсолютных ускорений  $\ddot{\mathbf{z}}$  определяется по правилу сложения ускорений в сложном движении:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{z}}_a &= \overset{\circ}{\ddot{\mathbf{z}}}_a + \dot{\omega}_{i+(a)} \times \mathbf{z}_a + 2\omega_{i+(a)} \times \overset{\circ}{\mathbf{z}}_a + \\ &\quad + \omega_{i+(a)} \times (\omega_{i+(a)} \times \mathbf{z}_a), \quad a = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.131)$$

Элементы  $\dot{\omega}_{i+(a)}$  запишем при помощи двух новых матриц, описывающей структуру системы, аналогичных матрицам  $\mathbf{S}$  и  $\mathbf{S}_0$ :

$$\mathbf{S}_0^+ = (S_{01}^+ \quad \dots \quad S_{0n}^+), \quad \mathbf{S}^+ = \begin{pmatrix} S_{11}^+ & \dots & S_{1n}^+ \\ \vdots & & \\ S_{n1}^+ & \dots & S_{nn}^+ \end{pmatrix}.$$

Матрицы  $\mathbf{S}_0^+$  и  $\mathbf{S}^+$  получаются из матриц  $\mathbf{S}_0$  и  $\mathbf{S}$  заменой элементов содержащих  $-1$  на нули, то есть:

$$S_{ia}^+ = \begin{cases} +1, & \text{если } i = i^+(a), \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad i = 0, \dots, n, \quad a = 1, \dots, n. \quad (3.132)$$

С использованием новых матриц элементы  $\dot{\omega}_{i^+(a)}$  можно записать в виде:

$$\dot{\omega}_{i^+(a)} = \sum_{j=0}^n S_{ja}^+ \dot{\omega}_j, \quad a = 1, \dots, n. \quad (3.133)$$

С учетом последнего выражения и используя полученное ранее выражение (3.100) запишем (3.131) в новом виде:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{z}}_a = & \sum_{i=1}^{n_a} \mathbf{k}_{ai} \ddot{q}_{ai} + s_a + \\ & + \sum_{j=1}^n \left( -S_{ja}^+ \mathbf{z}_a \times \dot{\omega}_j + 2\omega_j \times S_{ja}^+ \overset{\circ}{\mathbf{z}}_a + \omega_j \times (\omega_j \times S_{ja}^+ \mathbf{z}_a) \right) + \\ & + \dot{\omega}_0 \times S_{0a}^+ \mathbf{z}_a + 2\omega_0 \times S_{0a}^+ \overset{\circ}{\mathbf{z}}_a + \omega_0 \times (\omega_0 \times S_{0a}^+ \mathbf{z}_a). \end{aligned} \quad (3.134)$$

Объединив  $\mathbf{z}_a$  в одну матрицу столбец, получим:

$$\ddot{\mathbf{z}} = \mathbf{k}^T \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{s} - \mathbf{Z}^T \times \dot{\omega} + 2\mathbf{h} + \mathbf{g}^* + \mathbf{u}, \quad (3.135)$$

где  $\mathbf{g}_a^* = \sum_{j=1}^n \omega_j \times (\omega_j \times \mathbf{Z}_{ja})$ . Матрица  $\mathbf{k}$  определяется следующим образом:

$$\mathbf{k}^T = \begin{bmatrix} \boxed{k_{11} \dots k_{1n_1}} & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \boxed{k_{21} \dots k_{2n_2}} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \dots & \dots & \boxed{k_{n1} \dots k_{nn_n}} \end{bmatrix}. \quad (3.136)$$

Элементы матрицы-столбца  $\mathbf{s}$ :

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix},$$

определяются из выражения (3.101). Элементы матрицы  $\mathbf{Z}$ :

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{11} & \dots & \mathbf{Z}_{1n} \\ \vdots & & \\ \mathbf{Z}_{n1} & \dots & \mathbf{Z}_{nn} \end{bmatrix}, \quad (3.137)$$

имеют вид:

$$\mathbf{Z}_{ia} = S_{ia}^+ \mathbf{z}_a, \quad i, a = 1, \dots, n. \quad (3.138)$$

Элементы матриц  $\mathbf{h}$  и  $\mathbf{u}$  определяются следующим образом:

$$\mathbf{h}_a = \begin{cases} \omega_{i^+(a)} \times \overset{\circ}{\mathbf{z}}_a, & i^+(a) \neq 0, \\ 0, & i^+(a) = 0, \end{cases} \quad a = 1, \dots, n.$$

$$\mathbf{u}_a = \dot{\omega}_0 \times \mathbf{Z}_{0a} + 2\omega_0 \times \overset{\circ}{\mathbf{Z}}_{0a} + \omega_0 \times (\omega_0 + \mathbf{Z}_{0a}), \quad a = 1, \dots, n.$$

С учетом того, что только один элемент  $S_{0a}^+$  отличен от нуля, для всех  $a > 0$  элемент матрицы  $Z_{0a} = S_{0a}^+ \mathbf{z}_a$  равен нулю для всех  $a > 0$ , последнее выражение для  $\mathbf{u}_a$  можно упростить:

$$\mathbf{u}_a = (\dot{\omega}_0 \times \mathbf{z}_1 + 2\omega_0 \times \overset{\circ}{\mathbf{z}}_1 + \omega_0 \times (\omega_0 + \mathbf{z}_1)) \mathbf{S}_{0a}^+, \quad a = 1, \dots, n, \quad (3.139)$$

или в матричном виде:

$$\mathbf{u} = (\dot{\omega}_0 \times \mathbf{z}_1 + 2\omega_0 \times \overset{\circ}{\mathbf{z}}_1 + \omega_0 \times (\omega_0 + \mathbf{z}_1)) \mathbf{S}_0^{+T}. \quad (3.140)$$

Полученное выражение для  $\ddot{\mathbf{z}}$  подставим в (3.130):

$$\ddot{\mathbf{r}} = ((\mathbf{C} + \mathbf{Z})\mathbf{T})^T \times \dot{\omega} - \mathbf{T}^T (\mathbf{k}^T \ddot{\mathbf{q}} + 2\mathbf{h} + \mathbf{g}^*) - \mathbf{g} + \ddot{\mathbf{r}}_0 \mathbf{1}_n - (\ddot{\mathbf{C}}_0 \mathbf{T})^T - \mathbf{T}^T \mathbf{u}. \quad (3.141)$$

С учетом (3.118), последнее выражение примет следующий вид:

$$\ddot{\mathbf{r}} = - \left( ((\mathbf{C} + \mathbf{Z})\mathbf{T})^T \times \mathbf{p}^T + \mathbf{T}^T \mathbf{k}^T \right) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{U}. \quad (3.142)$$

где:

$$\mathbf{U} = - ((\mathbf{C} + \mathbf{Z})\mathbf{T})^T \times (\mathbf{T}^T \mathbf{f} - \dot{\omega}_0 \mathbf{1}_n) - 2\mathbf{T}^T \mathbf{h} - \mathbf{T}^T \mathbf{s} - \mathbf{T}^T \mathbf{g}^* - \mathbf{g} + \ddot{\mathbf{r}}_0 \mathbf{1}_n - (\ddot{\mathbf{C}}_0 \mathbf{T})^T - \mathbf{T}^T \mathbf{u}. \quad (3.143)$$

В последнее выражение для  $\ddot{\mathbf{r}}$  можно переписать следующим образом:

$$\boxed{\ddot{\mathbf{r}} = \left( (\mathbf{p}^T \times (\mathbf{C} + \mathbf{Z})\mathbf{T})^T - \mathbf{k}^T \right) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{U}.} \quad (3.144)$$

Упростим выражение для  $\mathbf{U}$ . Рассмотрим элементы слагаемого  $\mathbf{T}^T \mathbf{g}^* + \mathbf{g}$ :

$$(\mathbf{T}^T \mathbf{g}^* + \mathbf{g})_i = \sum_{a=1}^n \sum_{j=1}^n T_{ai} \omega_j \times (\omega_j \times S_{ja}^+ \mathbf{z}_a) + \sum_{j=1}^n \omega_j \times (\omega_j + \mathbf{d}_{ji}), \quad (3.145)$$

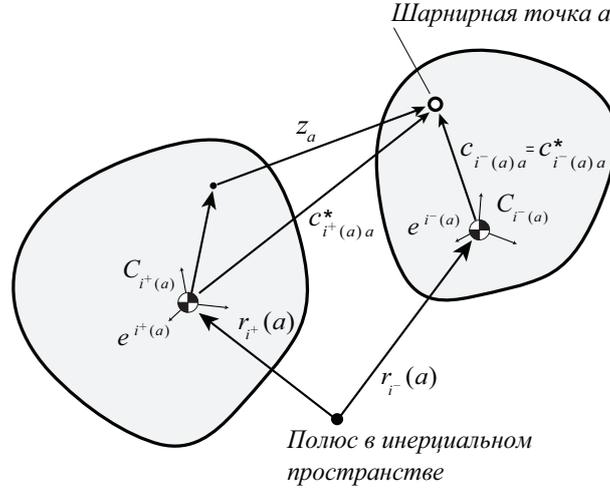


Рис. 3.16: К определению вектора  $\mathbf{c}_{ia}^*$ .

подставим, ранее полученное выражение для  $d_{ji}$  (3.13):

$$(\mathbf{T}^T \mathbf{g}^* + \mathbf{g})_i = \sum_{a=1}^n \sum_{j=1}^n T_{ai} \omega_j \times (\omega_j \times T_{ai} (S_{ja} \mathbf{c}_{ja} + S_{ja}^+ \mathbf{z}_a)). \quad (3.146)$$

Вынесем за скобку  $S_{ja}$  с учетом тождества  $S_{ja}^+ \equiv S_{ja} S_{ja}^+$ , и введем новый вектор  $\mathbf{c}_{ja}^*$ :

$$(\mathbf{T}^T \mathbf{g}^* + \mathbf{g})_i = \sum_{a=1}^n \sum_{j=1}^n T_{ai} \omega_j \times (\omega_j \times T_{ai} (S_{ja} \underbrace{(\mathbf{c}_{ja} + S_{ja}^+ \mathbf{z}_a)}_{\mathbf{c}_{ja}^*})). \quad (3.147)$$

$$\mathbf{c}_{ia}^* = \mathbf{c}_{ia} + S_{ia}^+ \mathbf{z}_a = \mathbf{c}_{ia} + \mathbf{Z}_{ia}, \quad i = 0, \dots, n. \quad (3.148)$$

На рисунке 3.16 показана геометрическая интерпретация вектора  $\mathbf{c}_{ia}^*$ , элементы которого определяются следующим образом:

$$\mathbf{c}_{ia}^* = \begin{cases} \mathbf{c}_{ia} + \mathbf{z}_a, & i = i^+(a) \\ \mathbf{c}_{ia}, & i = i^-(a) \\ \mathbf{0}, & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad i = 0, \dots, n, \quad a = 1, \dots, n. \quad (3.149)$$

Очевидно, что в случае равенства нулю шарнирного вектора  $\mathbf{z}_a$  вектора  $\mathbf{c}_{ia}^*$  и  $\mathbf{c}_{ia}$  будут равны, то есть  $\mathbf{c}_{ia}^*$  есть обобщение  $\mathbf{c}_{ia}$ , определенного при рассмотрении систем со сферическими шарнирами ( $\mathbf{z}_a = \mathbf{0}$ ), на случай систем с шарнирами общего вида. Используя  $\mathbf{c}_{ia}^*$  определим вектор  $\mathbf{d}_{ji}^*$ , как

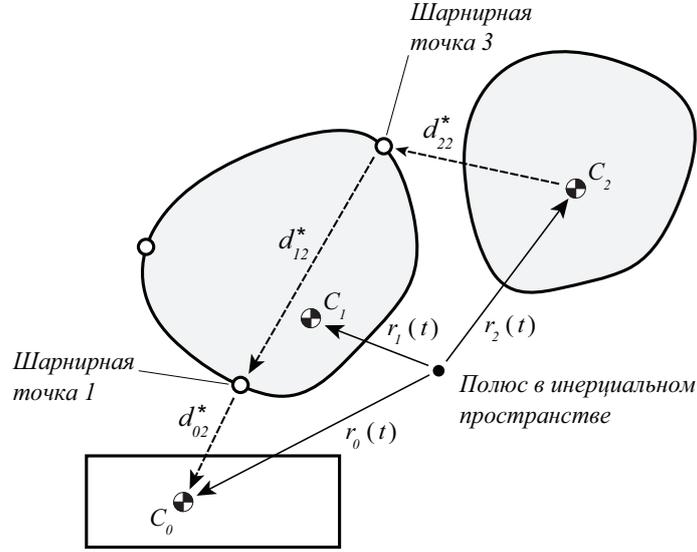


Рис. 3.17: К определению вектора  $\mathbf{d}_{ia}^*$ .

замену  $\mathbf{d}_{ji}$  (3.13):

$$\mathbf{d}_{ji}^* = \sum_{a=1}^n T_{ai} S_{ja} \mathbf{c}_{ja}^*, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (3.150)$$

Справедливо следующее соотношение:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_0 - \sum_{j=1}^n \mathbf{d}_{ji}^*, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.151)$$

которое аналогично выражению (3.12) с  $\mathbf{d}_{ij}$ . Вектора  $\mathbf{d}_{ij}$  были определены как элементы матрицы  $\mathbf{CT}$ , новые вектора  $\mathbf{d}_{ij}^*$  являются элементами матрицы  $(\mathbf{C} + \mathbf{Z})\mathbf{T}$ , которая присутствует в выражении для  $\mathbf{U}$ . С учетом определения  $\mathbf{d}_{ij}^*$  (3.147) примет следующий вид:

$$(\mathbf{T}^T \mathbf{g}^* + \mathbf{g})_i = \sum_{j=1}^n \omega_j \times (\omega_j \times \mathbf{d}_{ji}^*), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.152)$$

Рассмотрим последние три слагаемых в выражении (3.143). Из определения матрицы  $\mathbf{S}_0^+$  следует, что только один ее элемент  $S_{01}^+$  может быть отличен от нуля и равен +1, все остальные элементы равны нулю, следовательно в (3.140) произведение матриц  $\mathbf{T}^T \mathbf{S}_0^{+T} = -S_{01}^+ \mathbf{1}_n$ . Последние

три слагаемых (3.143) с учетом выражений для  $(\ddot{\mathbf{C}}_0 \mathbf{T})^T$  и  $\mathbf{c}_{ia}^*$ :

$$\ddot{\mathbf{r}}_0 \mathbf{1}_n - (\ddot{\mathbf{C}}_0 \mathbf{T})^T - \mathbf{T}^T \mathbf{u} = (\ddot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\omega}_0 \times \mathbf{c}_{01}^* + 2S_{01}^+ \omega_0 \times \overset{\circ}{\mathbf{z}}_1 + \omega_0 \times (\omega_0 \times \mathbf{c}_{01}^*)) \mathbf{1}_n. \quad (3.153)$$

Найдем последнее неизвестное необходимое для подстановки в принцип Даламбера - вариацию  $\delta \mathbf{r}$ :

$$\delta \mathbf{r} = -\mathbf{T}^T (\delta \mathbf{C}^T \mathbf{1}_n + \delta \mathbf{z}). \quad (3.154)$$

Элемент матрицы  $\mathbf{C}$  - вектор  $\mathbf{C}_{ia}$  жестко связан с телом  $i$ , следовательно его вариация равна  $\delta \mathbf{C}_{ia} = -\mathbf{C}_{ia} \times \delta \pi_i$ . Произведение  $\delta \mathbf{C}^T \mathbf{1}_n$  примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{C}^T \mathbf{1}_n &= - \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{11} \times \delta \pi_1 & \dots & \mathbf{C}_{n1} \times \delta \pi_n \\ \vdots & & \\ \mathbf{C}_{1n} \times \delta \pi_1 & & \mathbf{C}_{nn} \times \delta \pi_n \end{pmatrix} \mathbf{1}_n = \\ &= - \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{11} & \dots & \mathbf{C}_{n1} \\ \vdots & & \\ \mathbf{C}_{1n} & & \mathbf{C}_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \delta \pi_1 \\ \vdots \\ \delta \pi_n \end{pmatrix} = -\mathbf{C}^T \times \delta \pi. \end{aligned} \quad (3.155)$$

Второе слагаемое в выражении для  $\delta \mathbf{r}$  - матрица  $\delta \mathbf{z}_a$  имеет следующие элементы:

$$\delta \mathbf{z}_a = \overset{\circ}{\delta} \mathbf{z}_a + \delta \pi_{i+(a)} \times \mathbf{z}_a, \quad a = 1, \dots, n. \quad (3.156)$$

Вариацию вектора  $\mathbf{z}_a$  в базисе  $\mathbf{e}^{i+(a)}$  можно записать в матричном виде:

$$\overset{\circ}{\delta} \mathbf{z} = \mathbf{k}^T \delta \mathbf{q}. \quad (3.157)$$

Векторное произведение во втором слагаемом, с учетом равенства нулю вариации положения тела 0, запишем как:

$$\delta \pi_{i+(a)} \times \mathbf{z}_a = \sum_{j=0}^n S_{ja}^+ \delta \pi_j \times \mathbf{z}_a = - \sum_{j=1}^n S_{ja}^+ \mathbf{z}_a \times \delta \pi_j = - \sum_{j=1}^n \mathbf{Z}_{ja} \times \delta \pi_j. \quad (3.158)$$

Выражение для  $\delta \mathbf{r}$  примет вид:

$$\delta \mathbf{r} = \mathbf{T}^T ((\mathbf{C} + \mathbf{Z})^T \times \delta \pi - \mathbf{k}^T \delta \mathbf{q}). \quad (3.159)$$

Подставив выражение для  $\delta \pi$ , получим зависимость вариации положения тел от вариации обобщенных координат:

$$\delta \mathbf{r} = \mathbf{T}^T ((\mathbf{C} + \mathbf{Z})^T \mathbf{T}^T \times \mathbf{p}^T + \mathbf{k}^T) \delta \mathbf{q}, \quad (3.160)$$

или изменив порядок умножения матриц:

$$\boxed{\delta \mathbf{r} = (\mathbf{p} \times \mathbf{T}(\mathbf{C} + \mathbf{Z})\mathbf{T} - \mathbf{k}\mathbf{T})^T \delta \mathbf{q}.} \quad (3.161)$$

### 3.4.3 Возможная работа в шарнирах

Получим выражение для возможной работы в шарнирах. Возможная работа  $\delta W_a$  может быть функцией кинематических параметров  $\mathbf{z}_a, \overset{\circ}{\mathbf{z}}_a, \overset{\circ}{\delta} \mathbf{z}_a, \mathbf{G}_a, \mathbf{\Omega}_a, \delta\chi_a$ . Выражение для  $\delta W + a$  всегда линейно по  $\delta\chi_a$  и  $\overset{\circ}{\delta} \mathbf{z}_a$ :

$$\delta W_a = - \overset{\circ}{\delta} \mathbf{z}_a \mathbf{X}_a - \delta\chi_a \mathbf{Y}_a, \quad a = 1, \dots, n, \quad (3.162)$$

где  $\mathbf{X}_a$  и  $\mathbf{Y}_a$  – приведенные сила и момент, которые производят суммарную возможную работу равную работе существующих шарнирных сил.  $-\mathbf{X}_a$  и  $-\mathbf{Y}_a$  приложены к телу  $i^-(a)$ , положение которого подвергается варьированию, силы  $+\mathbf{X}_a$  и  $+\mathbf{Y}_a$  приложены к телу  $i^+(a)$ . С учетом полученных выражений вариаций шарнирного вектора и угловой ориентации тел через вариации обобщенных координат:

$$\delta W_a = - \sum_{i=1}^{n_a} \delta q_{ai} (\mathbf{k}_{ai} \mathbf{X}_a + \mathbf{p}_{ai} \mathbf{Y}_a), \quad a = 1, \dots, n. \quad (3.163)$$

Полная работа системы в матричном виде определяется следующим образом:

$$\boxed{\delta W = -\delta \mathbf{q}^T (\mathbf{kX} + \mathbf{pY})}, \quad (3.164)$$

где:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_n \end{pmatrix}.$$

### 3.4.4 Уравнения движения

Подставим полученные выражения для  $\dot{\omega}$ ,  $\delta\pi$ ,  $\ddot{\mathbf{r}}$ ,  $\delta\mathbf{r}$ ,  $\delta W$  в выражение для принципа Даламбера (3.95):

$$\delta \mathbf{q}^T [(\mathbf{p} \times \mathbf{T}(\mathbf{C} + \mathbf{Z})\mathbf{T} - \mathbf{kT})(\mathbf{F} - \mathbf{m}(\mathbf{p} \times \mathbf{T}(\mathbf{C} + \mathbf{Z})\mathbf{T} - \mathbf{kT})^T \ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{mU}) - \mathbf{pT}(\mathbf{M} - \mathbf{J}(-\mathbf{T}^T(\mathbf{p}^T \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}) + \dot{\omega}_0 \mathbf{1}_n) - \mathbf{V}) - \mathbf{kX} - \mathbf{pY}] = 0,$$

или в сокращенной форме:

$$\delta \mathbf{q}^T (-\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}) = 0,$$

где

$$\mathbf{A} = (\mathbf{p} \times \mathbf{T}(\mathbf{C} + \mathbf{Z})\mathbf{T} - \mathbf{kT})\mathbf{m}(\mathbf{p} \times \mathbf{T}(\mathbf{C} + \mathbf{Z})\mathbf{T} - \mathbf{kT})^T + (\mathbf{pT})\mathbf{J}(\mathbf{pT})^T,$$

и

$$\mathbf{B} = (\mathbf{p} \times \mathbf{T}(\mathbf{C} + \mathbf{Z})\mathbf{T} - \mathbf{kT})(\mathbf{F} - \mathbf{mU}) - \\ - \mathbf{pT}(\mathbf{M} + \mathbf{J}(\mathbf{T}^T \mathbf{f} - \dot{\omega}_0 \mathbf{1}_n) - \mathbf{V}) - \mathbf{kX} - \mathbf{pY}.$$

С учетом независимости обобщенных координат, получим искомое матричное уравнение движения:

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{B}. \quad (3.165)$$

### 3.4.5 Уравнения движения систем со фиктивным шарниром

Получим уравнения механической системы с фиктивным шарниром. Необходимо получить выражения для  $\ddot{\mathbf{R}}$  и  $\delta\mathbf{R}$ . С учетом того, что  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_C \mathbf{1}_n$ , на основе выражения для  $\mathbf{r}$  (3.123) получим:

$$\mathbf{R} = -(\mathbf{CT})^T \mathbf{1}_n - \mathbf{T}^T \mathbf{z} + (\mathbf{r}_0 + \mathbf{c}_{01} - \mathbf{r}_C) \mathbf{1}_n.$$

Умножим последнее выражение слева на  $\mu^T$ :

$$\mathbf{R} = -(\mathbf{CT}\mu)^T \mathbf{1}_n - (\mathbf{T}\mu)^T \mathbf{z}. \quad (3.166)$$

При помощи последнего уравнения получим выражения для  $\ddot{\mathbf{R}}$ :

$$\ddot{\mathbf{R}} = (\mathbf{p} \times \mathbf{T}(\mathbf{C} + \mathbf{Z})\mathbf{T}\mu - \mathbf{kT}\mu)^T \ddot{\mathbf{q}} + \mu^T \mathbf{U}, \quad (3.167)$$

для  $\delta\mathbf{R}$ :

$$\delta\mathbf{R} = (\mathbf{p} \times \mathbf{T}(\mathbf{C} + \mathbf{Z})\mathbf{T}\mu - \mathbf{kT}\mu)^T \delta\mathbf{q}. \quad (3.168)$$

Поскольку первая строка матрицы  $\mathbf{T}$  содержит только +1 или только -1, следовательно произведение  $\mathbf{T}\mu$ , в соответствии с (3.52):

$$\mathbf{T}\mu = \mp \mathbf{1}_n^T \mu = 0,$$

поэтому в выражениях для  $\ddot{\mathbf{R}}$  и  $\delta\mathbf{R}$  первый столбец матриц  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{Z}$  и  $\mathbf{k}$  умножается на 0. Это позволяет сделать вывод о том, что первые строки выражений для  $\ddot{\mathbf{R}}$  и  $\delta\mathbf{R}$ , содержащие величины связанные с движением тела 1 относительно базиса  $\mathbf{e}^{(0)}$ , подставленные в (??) не дадут возможность получить дифференциальные уравнения для тела 1. Нет необходимости вводить шесть обобщенных координат для шарнира 1, достаточно трех координат, задающий ориентацию тела 1 относительно  $\mathbf{e}^{(0)}$ . Таким образом, матрицы  $\mathbf{q}$  и  $\delta q$  содержат только 3 величины  $\mathbf{q}_{1i}$  и  $\delta\mathbf{q}_{1i}$  соответственно ( $i = 1, 2, 3$ ). Первые столбцы матриц  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{k}$  также содержат только по три элемента. Вид выражения для возможной работы  $\delta W$  не

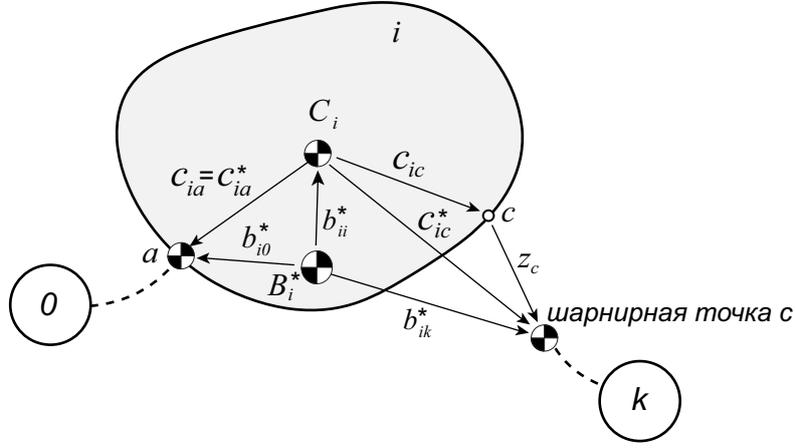


Рис. 3.18: К определению векторов  $b_{ij}^*$

изменится для систем с фиктивным шарниром, единственное отличие состоит в том, что силы и момент в шарнире 1 равны 0:  $\mathbf{X}_1 = 0$ ,  $\mathbf{Y}_1 = 0$ . Уравнения движения в матричной форме также будет иметь вид:

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{B}.$$

где:

$$\mathbf{A} = (\mathbf{p} \times \mathbf{T}(\mathbf{C} + \mathbf{Z})\mathbf{T}\mathbf{m}\mathbf{u} - \mathbf{kT}\mu)\mathbf{m}(\mathbf{p} \times \mathbf{T}(\mathbf{C} + \mathbf{Z})\mathbf{T}\mu - \mathbf{kT}\mu)^T + (\mathbf{pT})\mathbf{J}(\mathbf{pT})^T,$$

и

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = & (\mathbf{p} \times \mathbf{T}(\mathbf{C} + \mathbf{Z})\mathbf{T}\mu - \mathbf{kT}\mu)(\mathbf{F} - \mathbf{m}\mu^T\mathbf{U}) - \\ & - \mathbf{pT}(\mathbf{M} + \mathbf{J}(\mathbf{T}^T\mathbf{f} - \dot{\omega}_0\mathbf{1}_n) - \mathbf{V}) - \mathbf{kX} - \mathbf{pY}. \end{aligned}$$

Произведение  $\mathbf{m}\mu^T\mathbf{U}$ , с учетом определения матрицы  $\mathbf{U}$  определяется следующим образом:

$$\mu^T = -((\mathbf{C} + \mathbf{Z})\mathbf{T}\mu)^T \times (\mathbf{T}^T\mathbf{f} - \dot{\omega}_0\mathbf{1}_n) - \mu^T(\mathbf{T}^T(\mathbf{s} + 2\mathbf{h} + \mathbf{g}^*) + \mathbf{g}),$$

в силу тождества  $\mu\mathbf{1}_n = 0$ .

Рассмотрим элементы матрицы  $(\mathbf{C} + \mathbf{Z})\mathbf{T}\mu$  и их физический смысл. Вектора  $\mathbf{b}_{ij}$  являются элементами матрицы  $-\mathbf{CT}\mu$ , аналогично введем вектора  $\mathbf{b}_{ij}^*$ :

$$\mathbf{b}_{ij}^* = -((\mathbf{C} + \mathbf{Z})\mathbf{T}\mu)_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (3.169)$$

Отличие этих векторов от векторов  $\mathbf{b}_{ij}$  состоит в том, что новые вектора соединяют барицентр не с конечными точками векторов  $\mathbf{c}_{ia}$ , а с конечными точками векторов  $\mathbf{c}_{ia}^*$ , то есть с шарнирными точками, следовательно там-же располагаются и точечные массы формирующие дополненное тело, см. рисунок 3.18.

### 3.5 Метод отдельных тел

В 1974 году Верещагиным был предложен метод построения уравнений систем твердых тел с незамкнутой структурой и с шарнирами общего вида при котором нет необходимости в построении матрицы масс для всей системы [6]. Количество операций и, следовательно, затраты машинного времени предложенного метода линейно зависят от количества тел. Далее метод излагается по работе [9] применительно к системам с незамкнутой структурой.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из  $n$  последовательно соединенных тел: тело 1 присоединено к телу 0, закон движения которого известен. Запишем уравнения движения последнего тела цепи:

$$\mathbf{M}_n \mathbf{w}_n = \mathbf{Q}_n + \mathbf{R}_n, \quad (3.170)$$

где  $\mathbf{w}_n = \{\mathbf{a}_n, \epsilon_n\}^T$  - столбец линейных и угловых ускорений тела  $n$ ;  $\mathbf{M}_n$  - матрица масс;  $\mathbf{Q}_n$  - обобщенная сила, действующая на тело;  $\mathbf{R}_n$  - сила и момент реакции в шарнире, приведенные к центру масс, рис. 3.5. Уравнение движения предыдущего тела цепочки имеет вид:

$$\mathbf{M}_{n-1} \mathbf{w}_{n-1} = \mathbf{Q}_{n-1} + \mathbf{R}_{n-1} - \mathbf{C}_n^T \mathbf{R}_n \quad (3.171)$$

здесь на тело  $n - 1$  кроме обобщенной силы  $\mathbf{Q}_{n-1}$  и реакции  $\mathbf{R}_{n-1}$  действует реакция  $\mathbf{R}_n^*$  со стороны шарнира  $n$ , определяемая следующим образом:

$$\mathbf{R}_n^* = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \tilde{\rho}_n & \mathbf{I} \end{bmatrix} (-\mathbf{R}_n) = -\mathbf{C}_n^T \mathbf{R}_n.$$

Между ускорениями тел  $n$  и  $n - 1$  существует связь, которая в общем виде выражается имеет вид:

$$\mathbf{w}_n = \mathbf{C}_n \mathbf{w}_{n-1} + \mathbf{S}_n \ddot{\mathbf{q}}_n + \mathbf{w}'_n. \quad (3.172)$$

где  $\mathbf{q}$  - столбец обобщенных координат, задающих положение тела  $n$  относительно тела  $n - 1$ , размерность столбца  $\mathbf{q}$  определяется числом степеней свободы шарнира между смежными телами. Для идеальных связей выполняется соотношение, следующее из равенства нулю работ на возможном перемещении:

$$\mathbf{S}_n^T \mathbf{R}_n = 0. \quad (3.173)$$

Учитывая (3.173) умножим (3.170) слева на  $\mathbf{S}_n^T$  для исключения реакции:

$$\mathbf{S}_n^T \mathbf{M}_n \mathbf{w}_n = \mathbf{S}_n^T \mathbf{Q}_n.$$

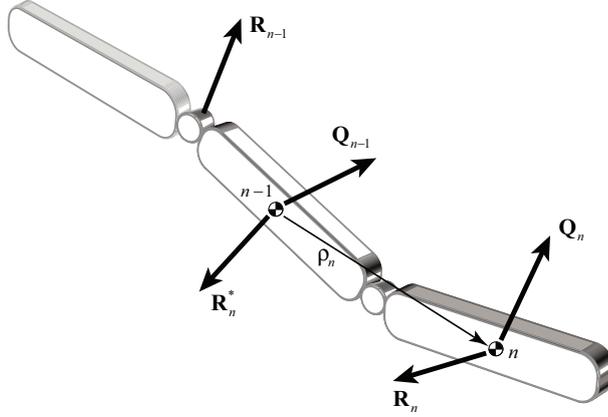


Рис. 3.19: К методу отдельных тел

В последнее выражение подставим  $\mathbf{w}_n$  из (3.172):

$$\mathbf{S}_n^T \mathbf{M}_n (\mathbf{C}_n \mathbf{w}_{n-1} + \mathbf{S}_n \ddot{\mathbf{q}}_n + \mathbf{w}'_n) = \mathbf{S}_n^T \mathbf{Q}_n^T,$$

получим связь между ускорением тела и второй производной от обобщенных координат в шарнире:

$$\ddot{\mathbf{q}}_n = \mathbf{U}_n^{-1} \mathbf{S}_n^T (\mathbf{Q}_n - \mathbf{M}_n (\mathbf{C}_n \mathbf{w}_{n-1} + \mathbf{w}'_n)) \quad (3.174)$$

где

$$\mathbf{U}_n = \mathbf{S}_n^T \mathbf{M}_n \mathbf{S}_n.$$

Далее подставим  $\ddot{\mathbf{q}}_n$  из (3.174) в кинематические соотношения (3.172), подставим  $\mathbf{w}_n$  в (3.170), выразив, таким образом, реакции  $\mathbf{R}_n$ . Теперь уравнение (3.171) можно преобразовать к виду:

$$\mathbf{M}_{n-1}^* \mathbf{w}_{n-1} = \mathbf{Q}_{n-1}^* + \mathbf{R}_{n-1},$$

которое справедливо для любого  $n = k$ :

$$\mathbf{M}_{k-1}^* \mathbf{w}_{k-1} = \mathbf{Q}_{k-1}^* + \mathbf{R}_{k-1}, \quad (3.175)$$

где:

$$\mathbf{M}_{k-1}^* = \mathbf{M}_{k-1} + \mathbf{C}_k^T \mathbf{M}_k \mathbf{C}_k - \mathbf{C}_k^T \mathbf{M}_k \mathbf{S}_k \mathbf{U}_k^{-1} \mathbf{S}_k^T \mathbf{M}_k \mathbf{C}_k, \quad (3.176)$$

$$\mathbf{Q}_{k-1}^* = \mathbf{Q}_{k-1} + \mathbf{C}_k^T (\mathbf{M}_k (\mathbf{S}_k \mathbf{U}_k^{-1} \mathbf{S}_k^T (\mathbf{Q}_k - \mathbf{M}_k \mathbf{w}'_k) + \mathbf{w}'_k) - \mathbf{Q}_k). \quad (3.177)$$

Уравнение (3.175) можно записать для  $k = n-1, n-2, \dots, 1$ , при этом в выражения для  $\mathbf{M}_{k-1}^*$  и  $\mathbf{Q}_{k-1}^*$  будут входить значения этих матриц на предыдущем шаге построенной рекурсии  $\mathbf{M}_k^*$  и  $\mathbf{Q}_k^*$ . Выполним

этой последовательности операций от тела  $n - 1$  до тела 0, ускорение которого известно, реализуется *обратный ход алгоритма*. Далее, зная ускорение тела 0, возможно определить ускорение тела 1, при помощи выражений (3.174) и (3.172), так реализуется *прямой ход алгоритма*. В выражения (3.174) и (3.172) будут входить вычисленные при обратном ходе алгоритма матрицы  $\mathbf{M}_k^*$  и  $\mathbf{Q}_k^*$ .

Рассмотренный метод эффективен для решения систем состоящих из большого числа последовательно соединенных тел. Далее представлен вариант реализации алгоритма метода отдельных тел на языке системы MATLAB на примере модели тройного физического маятника, изображенного на рис. 3.20. На каждое тело системы действует единичная сила веса направленная «вниз» вдоль оси  $y$  неподвижной системы координат. Конфигурация системы задается тремя углами - обобщенными координатами:  $q_1, q_2, q_3$ . Для запуска процесса интегрирования необходимо вы-

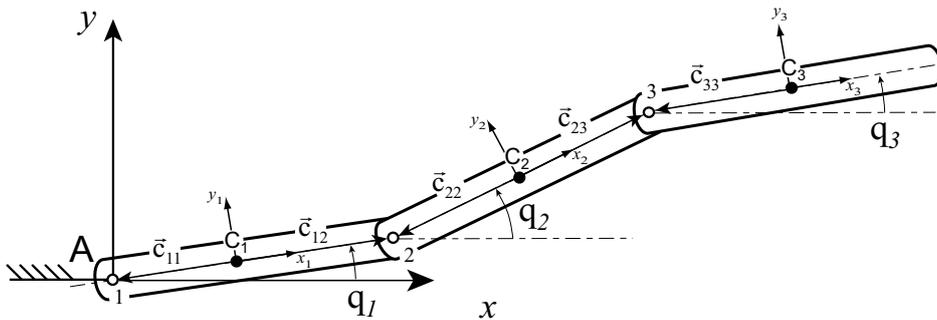


Рис. 3.20: Физический маятник

звать одну из функций интегрирования: ode45, ode113 и др., передав ей в качестве аргумента имя m-файла, формирующего правую часть дифференциальных уравнений движения, например:

```
[t,Y] = ode113('MethodOTODE');
```

Файл-функция MethodOTODE.m формирует правую часть дифференциальных уравнений движения.

```
function [out1,out2,out3] = MethodOTODE(t,y,flag)
global n;
global q;
global dq;
global Mkast;
global Qkast;
if nargin < 3 | isempty(flag)
```

```

% массив y
q{1}=y(1); % угол поворота тела 1
q{2}=y(2); % угол поворота тела 2
q{3}=y(3); % угол поворота тела 3
dq{1}=y(4); % угл. скорость тела 1
dq{2}=y(5); % угл. скорость тела 2
dq{3}=y(6); % угл. скорость тела 3
% предварительное вычисление
% матриц Mk* Qk*
for k=n:-1:1
Mkast{k}=GetMk(k);
    Qkast{k}=GetQk(k);
end
e1=Getd2qk(1);
e2=Getd2qk(2);
e3=Getd2qk(3);
% заполним массив производных y'
out1 = [dq{1};dq{2};dq{3};e1;e2;e3];
else
switch(flag)
    % начальные условия
    case 'init'
        % объявляем матрицы, начальные условия, ...
        init;
        % время интегрирования от 0 до 5 сек
        out1 = [0 5];
        % начальные условия см. файл mot.m
        out2 = [q{1};q{2};q{3};dq{1};dq{2};dq{3}];
    otherwise
        error(['Unknown request ''' flag '''.']);
    end
end
end

```

Файл-скрипт init.m объявляет глобальные переменные программы, задает параметры механической системы и начальные условия интегрирования.

```

% Инициализация системы
% три тела
global n; n=3;
% массивы для хранения вычисленных значений Mk*, Qk*
global Qkast;Qkast=cell(n,1);

```

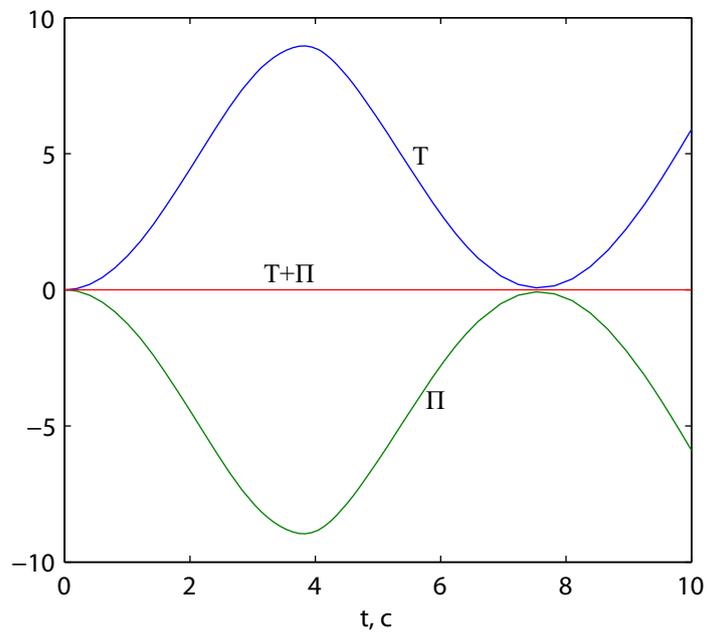
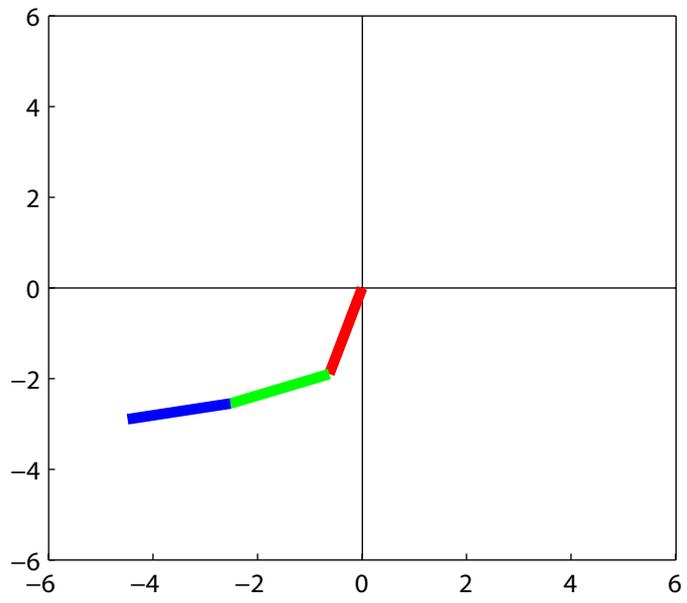


Рис. 3.21: Результат работы программы

```

global Mkast;Mkast=cell(n,1);
% матрицы масс
global m; m=cell(n,1);
% [m 0 0; 0 m 0; 0 0 Jz]
m{1}=[1 0 0;0 1 0;0 0 1];
m{2}=[1 0 0;0 1 0;0 0 1];
m{3}=[1 0 0;0 1 0;0 0 1];
% массив обобщенных координат
global q; q=cell(n,1);
% начальные условия - углы
q{1}=0;q{2}=0;q{3}=0;
% массив производных обобщенных координат
global dq; dq=cell(n,1);
% начальные условия - угловые скорости
dq{1}=0;dq{2}=0;dq{3}=0;
% массив шарнирных векторов
global c; c=cell(n,n);
c{1,1}=[-1;0;0];c{1,2}=[1;0;0];
c{2,2}=[-1;0;0];c{2,3}=[1;0;0];
c{3,3}=[-1;0;0];
% массив сил-моментов
% [Fx;Fy,Mz]
global Q; Q=cell(n,1);
Q{1}=[0;-1;0];
Q{2}=[0;-1;0];
Q{3}=[0;-1;0];

Файл-функция GetMk.m вычисляет матрицы  $M_k^*$ .

function res=GetMk(k)
global n; % количество тел
global m; % матрицы масс тел
global Mkast;
if (k==n)
    res=m{k};
else
    Sn=GetSn(k+1);
    Cn=GetCn(k+1);
    Un=GetUn(k+1);
    Mk=Mkast{k+1};
    res=m{k}+Cn'*Mk*Cn-Cn'*Mk*Sn*inv(Un)*Sn'*Mk*Cn;
end

```

Файл-функция GetQk.m вычисляет матрицы  $Q_k^*$ .

```
function res=GetQk(k)
global n;
global Q;
global Mkast;
if (k==n)
    res=Q{k};
else
    Sn=GetSn(k+1);
    Cn=GetCn(k+1);
    Un=GetUn(k+1);
    Mk=Mkast{k+1};
    Wprim=GetWprim(k+1);
    Qn=GetQk(k+1);
    res=Q{k}-Cn'*(Mk*(Sn*inv(Un)*Sn'*(Qn-Mk*Wprim)+Wprim)-Qn);
end
```

Файл-функция Getd2qk.m вычисляет матрицы значения  $\ddot{q}_k$ .

```
function res=Getd2qk(k)
global Qkast;
global Mkast;
w=GetWk(k-1);
Uk=GetUn(k);
Qk=Qkast{k};
Mk=Mkast{k};
Ck=GetCn(k);
Sk=GetSn(k);
res=inv(Uk)*Sk'*(Qk-Mk*(Ck*w+GetWprim(k)));
```

Файл-функция GetCn.m вычисляет матрицу  $C_n$ , входящую в выражение (3.172).

```
function res=GetCn(n)
global q;global c;
if (n==1)
    res=zeros(3,3);
else
    qn=q{n-1};
    cn=c{n-1,n};
    res=zeros(3,3);
    res(1,1)=1;
```

```

    res(2,2)=1;
    res(1,3)=-sin(qn)*cn(1)-cos(qn)*cn(2);
    res(2,3)=+cos(qn)*cn(1)-sin(qn)*cn(2);
end

```

Файл-функция GetSn.m вычисляет матрицу  $\mathbf{S}_n$ , входящую в выражение (3.172).

```

function res=GetSn(n)
global q;global c;
qn=q{n};
cn=c{n,n};
res=zeros(3,1);
res(1)=+cos(qn)*cn(2)+sin(qn)*cn(1);
res(2)=+sin(qn)*cn(2)-cos(qn)*cn(1);
res(3)=1;

```

Файл-функция GetUn.m вычисляет матрицу  $\mathbf{U}_n$ , входящую в выражение (3.174).

```

function res=GetUn(n)
global Mkast;
Sn=GetSn(n);
Mk=Mkast{n};
res=Sn'*Mk*Sn;

```

Файл-функция GetSn.m вычисляет матрицу  $\mathbf{w}'_n$ , входящую в выражение (3.172)

```

function res=GetWprim(n)
global q;global dq;global c;
if (n==1)
    q1=0;
    dq1=0;
    c1=[0;0;0];
else
    q1=q{n-1};
    dq1=dq{n-1};
    c1=c{n-1,n};
end
q2=q{n};
dq2=dq{n};
c2=c{n,n};

```

```

cq1=cos(q1);cq2=cos(q2);
sq1=sin(q1);sq2=sin(q2);
res=zeros(3,1);
dq12=dq1*dq1;
dq22=dq2*dq2;
res(1)=dq12*(-cq1*c1(1)+sq1*c1(2))+dq22*(+cq2*c2(1)-sq2*c2(2));
res(2)=dq12*(-sq1*c1(1)-cq1*c1(2))+dq22*(+sq2*c2(1)+cq2*c2(2));
res(3)=0;

```

Файл-скрипт start.m запускает процесс интегрирования и отображает результаты расчета: конфигурацию системы, графики изменения кинетической, потенциальной и полной энергии, см. рис. 3.21.

```

%% Интегрирование
% результат интегрирования:
% Y(:,1) столбец углов поворота 1 тела
% Y(:,2) столбец углов поворота 2 тела
% Y(:,3) столбец углов поворота 3 тела
% Y(:,4) столбец угл. скорости 1 тела
% Y(:,5) столбец угл. скорости 2 тела
% Y(:,6) столбец угл. скорости 3 тела
[t,Y] = ode113('motODE');
%% рисование конфигурации системы
subplot(1,2,1);
M = moviein(size(Y,1));
axis([-6 6 -6 6]);
hold on;
for i=1:size(Y,1) % for each step

    p0=[0;0;0];
    pA=[cos(Y(i,1));sin(Y(i,1));0]*2;
    pB=pA+[cos(Y(i,2));sin(Y(i,2));0]*2;
    pC=pB+[cos(Y(i,3));sin(Y(i,3));0]*2;

    rod1=[p0';pA'];
    rod2=[pA';pB'];
    rod3=[pB';pC'];

    % line(x,y,z,opttions...)
    line(rod1(:,1),rod1(:,2),rod1(:,3), ...
        'LineWidth',4,'Color','Red');
    line(rod2(:,1),rod2(:,2),rod2(:,3), ...

```

```

'LineWidth',4,'Color','Green');
line(rod3(:,1),rod3(:,2),rod3(:,3), ...
'LineWidth',4,'Color','Blue');

M(:,i) = getframe;
%mo= getframe;
%mov=addframe(mov,mo);
cla;
end
%% Вычисление скоростей тел
v12=Y(:,4).^2;
v22=4*Y(:,4).^2+4*cos(Y(:,1)-Y(:,2)).*Y(:,4).*Y(:,5)+Y(:,5).^2;
v32=(2*cos(Y(:,1)).*Y(:,4)+2*cos(Y(:,2)).*Y(:,5)+ ...
cos(Y(:,3)).*Y(:,6)).^2+(2*sin(Y(:,1)).*Y(:,4)+ ...
2*sin(Y(:,2)).*Y(:,5)+sin(Y(:,3)).*Y(:,6)).^2;
%% кинетическая и потенциальная энергия
Ek=(v12+v22+v32)*0.5+0.5*(Y(:,4).*Y(:,4)+ ...
Y(:,5).*Y(:,5)+Y(:,6).*Y(:,6));
Ep=(sin(Y(:,1))+2*sin(Y(:,1))+sin(Y(:,2))+ ...
2*sin(Y(:,1))+2*sin(Y(:,2))+sin(Y(:,3)));
%% Построение графика кинетической, потенциальной
% и полной энергии системы
subplot(1,2,2);
plot(t, [Ek, Ep, Ek+Ep]);

```

### 3.6 Системы тел с замкнутой структурой

Как было отмечено выше, большинство механических систем имеют замкнутую структуру (см. рис. 2.9), поэтому важно получить процедуру построения уравнений движения таких систем, этому посвящен настоящий раздел. Систему с замкнутой структурой можно преобразовать в систему с незамкнутой структурой разрезав один или несколько шарниров. Новая система далее будет называться «приведенной». Уравнения движения приведенной системы можно построить используя полученные ранее результаты для систем со структурой дерева, а полученным уравнениям необходимо добавить уравнения связи, учитывающие связь в разрезанных шарнирах. Разрезаемые шарниры следует выбирать так, чтобы количество и сложность возникающих впоследствии уравнений связи было минимальным. Может случиться так, что в приведенной системе несколько тел могут быть связано с телом 0, движение которого задано и приведенная система будет состоять из нескольких изолиро-

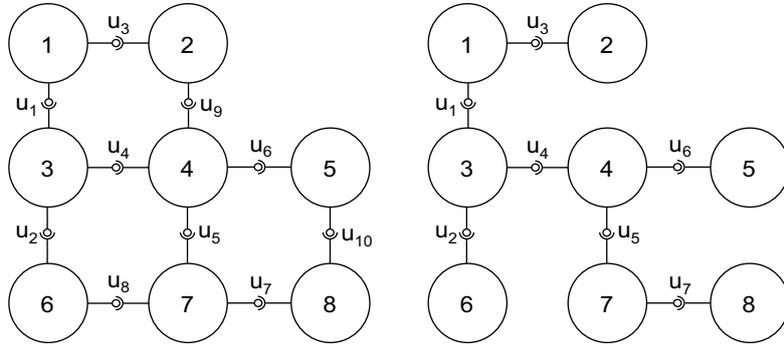


Рис. 3.22: Исходная система с замкнутой структурой и приведенная система

ванных подсистем, каждая из которых связана с телом 0. Для каждой подсистемы можно записать уравнения движения:

$$\mathbf{A}^k \ddot{\mathbf{q}}^k = \mathbf{B}^k, \quad (3.178)$$

где индекс  $k$  - индекс соответствующей подсистемы. Уравнение движение всей приведенной системы будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} A^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A^2 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & A^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \\ \dots \\ q^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^1 \\ B^2 \\ \dots \\ B^k \end{pmatrix} \quad (3.179)$$

Пронумеруем тела и шарниры системы следующим образом. Приведенная система состоит из  $n + 1$  тел, включая тело 0, и  $n$  шарниров. Разрезанные шарниры пронумеруем от  $n + 1$  до  $n + n^*$ . Граф полной системы описывается функциями  $i^+(a)$  и  $i^-(a)$  (табл. 3.2) или матрицей  $\mathbf{S}$ : Матрица инцидентности механической системы с замкнутой структурой

Таблица 3.2: Функции  $i^+(a)$  и  $i^-(a)$  для ориентированного графа, изображенного на рисунке 3.22.

Дуги	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$	$u_5$	$u_6$	$u_7$	$u_8$	$u_9$	$u_{10}$
$i^+(a)$	5	6	0	1	1	3	0	4	0	5
$i^-(a)$	0	4	2	2	7	2	4	3	7	6

определяется аналогично приведенному ранее правилу, см. (1.1).

Разделим матрицу инцидентности на четыре блока: два из них относятся к приведенной системе и были рассмотрены ранее - это матрицы

$S_0$  и  $S$ . Два другие блока относятся к шарнирам с  $n + 1$  до  $n + n^*$  - это матрицы  $S_0^*$  и  $S^*$ . Матрицу  $T$  можно записать только для приведенной системы, поскольку на теле 0 может быть несколько шарниров и к телу 0 может вести несколько путей. Для системы, изображенной на рисунке 3.22 блоки матрицы инцидентности имеют следующий вид:

$$\left[ \begin{array}{cccccc|ccc} -1 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & +1 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right] \quad (3.180)$$

Аналогично определяются и матрицы  $S_0^+$ ,  $S^+$  и  $S_0^{*+}$ ,  $S^{*+}$  для которых элементы  $-1$  заменяются на 0:

$$S_0^+ = [0 \ 0 \ +1 \ 0 \ 0 \ 0 \ +1] \quad (3.181)$$

$$S^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.182)$$

$$S^{*+} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_0^{*+} = [0 \ +1 \ 0] \quad (3.183)$$

Определим понятие правильной нумерации приведенной системы. В общем случае на теле 0 может быть несколько шарниров. Каждый шарнир позволяет выделить механическую подсистему со структурой дерева, связанную с телом 0. Приведенная система в целом правильно пронумерована если она обладает следующими свойствами:

- для всей системы используется сквозная нумерация;

- номера тел и шарниров, каждой подсистемы образуют непрерывную последовательность целых чисел;
- каждая подсистема правильно пронумерована.

Такой принцип нумерации тел и шарниров позволяет использовать полученные ранее результаты. Справедливы выведенные ранее уравнения движения:

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{B}.$$

где:

$$\mathbf{A} = (\mathbf{p} \times \mathbf{T}(\mathbf{C} + \mathbf{Z})\mathbf{T}\mathbf{m}\mathbf{u} - \mathbf{k}\mathbf{T}\boldsymbol{\mu})\mathbf{m}(\mathbf{p} \times \mathbf{T}(\mathbf{C} + \mathbf{Z})\mathbf{T}\boldsymbol{\mu} - \mathbf{k}\mathbf{T}\boldsymbol{\mu})^T + (\mathbf{p}\mathbf{T})\mathbf{J}(\mathbf{p}\mathbf{T})^T,$$

и

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = & (\mathbf{p} \times \mathbf{T}(\mathbf{C} + \mathbf{Z})\mathbf{T}\boldsymbol{\mu} - \mathbf{k}\mathbf{T}\boldsymbol{\mu})(\mathbf{F} - \mathbf{m}\boldsymbol{\mu}^T\mathbf{U}) - \\ & - \mathbf{p}\mathbf{T}(\mathbf{M} + \mathbf{J}(\mathbf{T}^T\mathbf{f} - \dot{\omega}_0\mathbf{1}_n) - \mathbf{V}) - \mathbf{k}\mathbf{X} - \mathbf{p}\mathbf{Y}. \end{aligned}$$

Для систем с одним шарниром на теле 0 выполнялись следующие соотношения для вектора  $\mathbf{d}_{0j}$ :

$$\mathbf{d}_{0j} = (\mathbf{C}_0\mathbf{T})_j = \sum_{a=1}^n T_{aj}S_{0a}c_{0a} = -c_{01}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.184)$$

которые не справедливы для общего случая приведенной системы, не выполняется и равенство (3.129). По той-же причине нельзя использовать выражение (3.140) для определения матрицы  $\mathbf{u}$  поскольку  $Z_{0a} = S_{0a}^+\mathbf{z}_a$  не равен нулю для всех  $a > 0$ . Для определения матрицы  $\mathbf{u}$  необходимо использовать общее выражение:

$$\mathbf{u}_a = \dot{\omega}_0 \times \mathbf{Z}_{0a} + 2\omega_0 \times \overset{\circ}{\mathbf{Z}}_{0a} + \omega_0 \times (\omega_0 + \mathbf{Z}_{0a}), \quad a = 1, \dots, n. \quad (3.185)$$

Все отмеченные выше изменения повлияют только на три последних слагаемых матрицы  $\mathbf{U}$ , ранее определяемых выражением (3.153), которое для приведенной системы перепишем в виде:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_0\mathbf{1}_n - (\ddot{\mathbf{C}}_0\mathbf{T})^T - \mathbf{T}^T\mathbf{u} = & (\ddot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\omega}_0 \times \mathbf{c}_{0a(i)}^* + 2S_{0a(i)}^+\omega_0 \times \overset{\circ}{\mathbf{z}}_{a(i)} + \\ & + \omega_0 \times (\omega_0 \times \mathbf{c}_{0a(i)}^*))\mathbf{1}_n, \end{aligned} \quad (3.186)$$

где  $a(i)$  - индекс дуги инцидентной вершине 0, которая принадлежит пути от  $s_0$  к  $s_i$ , то есть это индекс шарнира при помощи которого тело  $i$  приведенной системы прямо или косвенно соединяется с телом 0.

Для систем не связанных с каким-либо телом, движение которого известно, вид уравнений движения не изменится, так как в этом случае в систему вводится единственный фиктивный шарнир связанный с базисом  $e^{(0)}$ , и этот шарнир связан только с одним телом.

### 3.6.1 Уравнения связи

Получив уравнения движения приведенной системы необходимо дополнить ее уравнениями связи, отражающие связь между обобщенными координатами приведенной системы. Кроме голономных связей вида

$$f_i(q, t) = 0, \quad i = 1, \dots, \mu_1,$$

которые были рассмотрены ранее в системе могут присутствовать и неголономные связи, имеющие в большинстве практических случаев вид:

$$g_i(q, \dot{q}, t) = a_{i0} + a_{i1}\dot{q}_{11} + \dots + a_{iN}\dot{q}_{nn_N}, \quad i = \mu_1, \dots, \mu_2.$$

где  $\mu_1$  - количество устраненных неголономных связей в системе;  $\mu_2$  - полное количество устраненных связей в системе. Для голономных уравнений связи выполняются следующие равенства для вариаций координат:

$$\delta f_i = \delta q^T (f'_i)^T = 0, \quad i = 1, \dots, \mu_1.$$

где  $f'_i$  - матрица-строка частных производных:

$$f'_i = \left[ \frac{\delta f_i}{\delta q_{11}} \quad \dots \quad \frac{\delta f_i}{\delta q_{nn_N}} \right], \quad i = 1, \dots, \mu_1.$$

Вариации обобщенных координат, также удовлетворяют соотношениям

$$a_{i1}\delta q_{11} + \dots + a_{iN}\delta q_{nn_N}, \quad i = \mu_1, \dots, \mu_2,$$

которые можно переписать в матричной форме:

$$\delta q^T a_i^T, \quad i = \mu_1, \dots, \mu_2.$$

Принцип Даламбера для системы с замкнутой структурой теперь можно записать в виде:

$$\delta q^T \left[ -A\ddot{q} + B + \sum_{i=1}^{\mu_1} \lambda_i (f'_i)^T + \sum_{i=\mu_1+1}^{\mu_2} \lambda_i a_i^T \right] + \delta W^* = 0. \quad (3.187)$$

где  $\delta W^*$  - полная работа, совершаемая в разрезанных шарнирах;  $\lambda_i$  - множители Лагранжа, количество которых равно, количеству устраненных связей. Если ввести матрицу обобщенных сил, действующих в разрезанных шарнирах -  $B^*$ , и объединить множители Лагранжа в один столбец  $\lambda$  то последнее выражение можно переписать в виде:

$$\delta q^T [-A\ddot{q} + B + B^* + H^T \lambda] = 0. \quad (3.188)$$

где  $H$  - прямоугольная матрица, составленная из матриц-строк  $f'_i$  и  $a_i^T$ :

$$H = \begin{bmatrix} f'_1 \\ \vdots \\ f'_{\mu_1} \\ a_{\mu_1+1} \\ \vdots \\ a_{\mu_2} \end{bmatrix}. \quad (3.189)$$

Если уравнения связи независимы, и следовательно  $\mu_2$  вариаций координат зависимы, то множители Лагранжа можно подобрать так, чтобы коэффициенты при линейно-зависимых вариациях координат обратились в нуль. Коэффициенты при остальных вариациях должны быть равны нулю в силу их линейной независимости. Это позволяет получить уравнения движения:

$$\boxed{-A\ddot{q} + B + B^* + H^T \lambda = 0}, \quad (3.190)$$

которые необходимо решать совместно с уравнениями связи.

### 3.6.2 Возможная работа в разрезанных шарнирах

Рассмотрим процедуру определения выражения возможной работы в разрезанных шарнирах. Как и для шарниров приведенной системы возможная работа в разрезанном шарнире определяется через величины, которые характеризуют относительное перемещение и вращение смежных тел. Ранее были получены значения этих величин:  $z_a$ ,  $\overset{\circ}{z}_a$ ,  $\overset{\circ}{\delta} z_a$ ,  $G_a$ ,  $\Omega_a$ ,  $\delta\chi_a$ . Вектор  $z_a$  определяется через вектора  $c_{i^+(a)a}$  и  $c_{i^-(a)a}$  введенные для разрезанных шарниров ( $a = n + 1, \dots, n + n^*$ ):

$$z_a = (r_{i^-(a)} + c_{i^-(a)}) - (r_{i^+(a)} + c_{i^+(a)}), \quad a = n + 1, \dots, n + n^*.$$

При помощи матрицы  $S$  последнее уравнение можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_a = & - \sum_{i=0}^n S_{ia}(\mathbf{r}_i + \mathbf{c}_{ia}) = \\ & - S_{0a}(\mathbf{r}_a - \mathbf{c}_{0a}) - \sum_{i=0}^n S_{ia}(\mathbf{r}_i + \mathbf{c}_{ia}), \quad a = n + 1, \dots, n + n^*. \end{aligned} \quad (3.191)$$

$\mathbf{z}_a$  объединим в матрицу  $\mathbf{z}^*$ :

$$\mathbf{z}_a = -\mathbf{r}_0 \mathbf{S}_0^{*T} - \mathbf{C}_0^{*T} - \mathbf{S}^{*T} \mathbf{r} - \mathbf{C}^{*T} \mathbf{1}_n. \quad (3.192)$$

В последнее выражение подставим значение вектора  $\mathbf{r}$ , определяемое (3.123):

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^* = & -\mathbf{r}_0 \mathbf{S}_0^{*T} - \mathbf{C}_0^{*T} - \mathbf{S}^{*T} [-(\mathbf{C}\mathbf{T})^T - \mathbf{1}_n - \mathbf{T}^T \mathbf{z} + \mathbf{r}_0 \mathbf{1}_n - \mathbf{T}^T \mathbf{C}_0^T] - \\ & - \mathbf{C}^{*T} \mathbf{1}_n = -\mathbf{r}_0 (\mathbf{S}_0^{*T} - \mathbf{S}^{*T} \mathbf{1}_n) - \\ & - (\mathbf{C}_0^* - \mathbf{C}_0 \mathbf{T} \mathbf{S}^*)^T - (\mathbf{C}^* - \mathbf{C} \mathbf{T} \mathbf{S}^*)^T \mathbf{1}_n + (\mathbf{T} \mathbf{S}^*)^T \mathbf{z}. \end{aligned} \quad (3.193)$$

$a$ -ый элемент матрицы-столбца  $S_0^{*T} + S^{*T} \mathbf{1}_n$  для  $a = n + 1, \dots, n + n^*$  равен сумме всех элементов  $a$ - столбца матрицы инцидентности; каждый столбец матрицы инцидентности содержит только два элемента отличные от нуля: -1 и 1, поэтому элемент матрицы  $S_0^{*T} + S^{*T} \mathbf{1}_n$  равен нулю. Выражение  $\mathbf{z}^*$  принимает следующий вид:

$$\mathbf{z}^* = -(\mathbf{C}_0^* - \mathbf{C}_0 \mathbf{T} \mathbf{S}^*)^T - (\mathbf{C}_0 - \mathbf{C}_0 \mathbf{T} \mathbf{S})^T \mathbf{1}_n + (\mathbf{T} \mathbf{S}^*)^T \mathbf{z}. \quad (3.194)$$

Определим выражение для матрицы  $\overset{\circ}{z}^* = [\overset{\circ}{z}_{n+1}, \dots, \overset{\circ}{z}_{n+n^*}]^T$ . Производные  $\overset{\circ}{z}_a$  и  $\dot{z}_a$  связаны соотношением:

$$\overset{\circ}{z}_a = \dot{z}_a - \omega_{i+(a)} \times z_a$$

Поскольку элементы этой матрицы представляют собой относительные скорости точек смежных тел, то  $\overset{\circ}{z}^*$  не зависит от кинематических параметров тела 0:  $\dot{r}_0$  и  $\omega_0$ . Выражение для  $\dot{z}^*$  будет иметь вид:

$$\dot{z}^* = -\mathbf{S}^{*T} \dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{C}}^{*T} \mathbf{1}_n + \dots,$$

где  $\dots$  - обозначены слагаемые которые, зависят от  $\dot{r}_0$  и  $\omega_0$ . Выражение для  $\overset{\circ}{z}_a$  можно записать в матричном виде:

$$\overset{\circ}{z}^* = \dot{z}^* + \mathbf{Z}^{*T} \times \omega + \dots,$$

где элементы матрицы  $\mathbf{Z}$  определяются следующим образом:

$$Z_{ia}^* = S_{ia}^+ z_a, \quad i = 1, \dots, n, \quad a = n + 1, \dots, n + n^*.$$

Выражение для

$$\overset{\circ}{z}^* = -\mathbf{S}^{*T} \dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{C}}^{*T} \mathbf{1}_n + \mathbf{Z}^{*T} \times \omega + \dots,$$

Производная  $\dot{\mathbf{r}}$  определяется в результате дифференцирования выражения (3.123):

$$\dot{\mathbf{r}} = -(\dot{\mathbf{C}}\mathbf{T})^T \mathbf{1}_n - \mathbf{T}^T \dot{z} + \dots,$$

где многоточием также обозначены элементы-производные от  $r_0$  и члены, зависящие от  $\omega_0$ . Локальная производная  $\overset{\circ}{z}^*$  теперь определяется выражением:

$$\overset{\circ}{z}^* = -(\dot{\mathbf{C}}^* - \dot{\mathbf{C}}\mathbf{T}\mathbf{S}^*)^T \mathbf{1}_n + (\mathbf{T}\mathbf{S}^*)\mathbf{z} + \mathbf{Z}^{*T} \times \omega + \dots$$

Первое слагаемое, содержащее производную матрицы, содержащей шарнирные вектора, можно переписать используя угловую скорость:

$$-(\dot{\mathbf{C}}^* - \dot{\mathbf{C}}\mathbf{T}\mathbf{S}^*)^T \mathbf{1}_n = -(\mathbf{C}^* - \mathbf{C}\mathbf{T}\mathbf{S}^*)^T \times \omega.$$

Для векторов  $\dot{z}_a$  выполняется соотношение:

$$\dot{z}_a = \overset{\circ}{z}_a + \omega_{i+(a)} \times z_a = \overset{\circ}{z}_a - \sum_{i=1}^n S_{ia}^+ z_a \times \omega_i + \dots, a = 1, \dots, n,$$

или в матричной форме:

$$\mathbf{z} = \overset{\circ}{\mathbf{z}} - \mathbf{Z}^T \times \omega + \dots$$

Выражение для  $\overset{\circ}{\mathbf{z}}^*$ :

$$\overset{\circ}{\mathbf{z}}^* = (\mathbf{C}^* + \mathbf{Z}^* - (\mathbf{C} + \mathbf{Z})\mathbf{T}\mathbf{S}^*)^T \times \omega + (\mathbf{T}\mathbf{S}^*)^T \overset{\circ}{\mathbf{z}} + \dots$$

Учитывая полученное ранее выражение для  $\omega$  (3.111):

$$\omega = -\mathbf{T}^T(\mathbf{p}^T \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{p}_0) + \omega_0 \mathbf{1}_n,$$

и  $\overset{\circ}{\mathbf{z}} = \mathbf{k}^T \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{k}_0$  получим окончательное выражение для  $\overset{\circ}{\mathbf{z}}^*$ :

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\mathbf{z}}^* &= (\mathbf{p}\mathbf{T} \times [\mathbf{C}^* + \mathbf{Z}^* - (\mathbf{C} + \mathbf{Z})\mathbf{T}\mathbf{S}^*] + \mathbf{k}\mathbf{T}\mathbf{S}^*)^T \dot{\mathbf{q}} - \\ &\quad - (\mathbf{T}[\mathbf{C}^* + \mathbf{Z}^* - (\mathbf{C} + \mathbf{Z})\mathbf{T}\mathbf{S}^*])^T \times \mathbf{p}_0 + (\mathbf{T}\mathbf{S}^*) \mathbf{k}_0. \end{aligned} \quad (3.195)$$

где  $\mathbf{k}_0 = [\mathbf{k}_{10} \dots \mathbf{k}_{n0}]^T$ . Все величины, входящие в полученное выражение для  $\overset{\circ}{\mathbf{z}}^*$  являются известными функциями обобщенных координат. Выражение для вариации  $\overset{\circ}{\delta} \mathbf{z}^*$  имеет вид:

$$\overset{\circ}{\delta} \mathbf{z}^* = (\mathbf{p}\mathbf{T} \times [\mathbf{C}^* + \mathbf{Z}^* - (\mathbf{C} + \mathbf{Z})\mathbf{T}\mathbf{S}^*] + \mathbf{k}\mathbf{T}\mathbf{S}^*)^T \delta \mathbf{q}. \quad (3.196)$$

Матрицы преобразования  $\mathbf{G}_a$  для  $a = n + 1, \dots, n + n^*$  вычисляются при помощи известных матриц преобразования координат:

$$\mathbf{G}_a = \mathbf{A}_{i+(a)}^T \mathbf{A}_{i-(a)}, \quad a = n + 1, \dots, n + n^*.$$

Рассмотрим относительные угловые скорости  $\Omega_a$  ( $a = n + 1, \dots, n + n^*$ ). Ранее было рассмотрено выражение, связывающее абсолютную и относительную угловые скорости:

$$\Omega_a = \omega_{i-(a)} - \omega_{i+(a)}, \quad a = n + 1, \dots, n + n^*,$$

которое можно записать при помощи матрицы инцидентности:

$$\Omega_a = -\mathbf{S}_{0a}\omega_0 - \sum_{i=1}^n S_{ia}\omega_i, \quad a = n + 1, \dots, n + n^*.$$

Последние соотношения перепишем в матричной форме, обозначив  $\Omega^* = [\Omega_{n+1} \dots \Omega_{n+n^*}]$ :

$$\Omega^* = -\omega_0 \mathbf{S}_0^{*T} - \mathbf{S}^{*T} \omega.$$

Подставим в последнее выражение  $\omega$  из (3.111):

$$\Omega^* = -\omega_0 (\mathbf{S}_0^{*T} + \mathbf{S}^{*T} \mathbf{1}_n) + (\mathbf{TS}^*)^T \Omega.$$

Выразим в последнем выражении матрицу относительных угловых скоростей через производные обобщенных координат (3.103) и, учитывая равенство нулю множителя при  $\omega_0$ , получим:

$$\Omega^* = (\mathbf{pTS}^*)^T \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{TS}^*)^T \mathbf{p}_0. \quad (3.197)$$

Полученное соотношение позволяет выразить вариации углового положения  $\delta\chi^* = (\delta\chi_{n+1} \dots \delta\chi_{n+n^*})^T$ :

$$\delta\chi^* = (\mathbf{pTS}^*)^T \delta\mathbf{q}. \quad (3.198)$$

Выражение для возможной работы  $\delta W_a$  в разрезанном шарнире  $a$  должно быть линейным по  $\overset{\circ}{\delta} z_a, \overset{\circ}{\delta} \chi_a$ :

$$\delta W_a = -\overset{\circ}{\delta} z_a \mathbf{X}_a - \overset{\circ}{\delta} \chi_a \mathbf{Y}_a, \quad a = n + 1, \dots, n + n^*.$$

Работа совершаемая во всех разрезанных шарнирах определяется выражением:

$$\delta \mathbf{q}^T \mathbf{B}^* = - \sum_{a=n+1}^{n+n^*} \left( \overset{\circ}{\delta} z_a \mathbf{X}_a + \overset{\circ}{\delta} \chi_a \mathbf{Y}_a \right) = - \overset{\circ}{\delta} \mathbf{z}^{*T} \mathbf{X}^* - \overset{\circ}{\delta} \chi^{*T} \mathbf{Y}^*.$$

В последнее выражение подставим полученные значения вариаций, что позволит выразить матрицу  $\mathbf{B}^*$ :

$$\mathbf{B}^* = -(\mathbf{pT} \times (\mathbf{C}^* + \mathbf{Z}^* - (\mathbf{C} + \mathbf{Z})\mathbf{TS}^*) + \mathbf{kTS}^*) \cdot \mathbf{X}^* - \mathbf{pTS}^* \cdot \mathbf{Y}^*. \quad (3.199)$$

## Список литературы

- [1] *Baraff, D.* Linear-time dynamics using Lagrange multipliers / D. Baraff. — Carnegie Mellon University, 1996.
- [2] *Fisher, O.* Theoretische Grundlagen für eine Mechanik der lebenden Körper / O. Fisher. — Teubner, 1906.
- [3] *Pogorelov, D.* Plate modeling by rigid-elastic elements / D. Pogorelov // Zwischenbericht ZB-103. — Universität Stuttgart: Institut für Mechanik, 1998.
- [4] *Верещагин, А. Ф.* Компьютерное моделирование динамики сложных механизмов роботов-манипуляторов / А. Ф. Верещагин // Инженерная кибернетика, вып. 6. — 1974. — С. 65–70.
- [5] *Виттенбург, Й.* Динамика систем твердых тел / Й. Виттенбург. — М.: Мир, 1980.
- [6] *Голуб, Д.* Матричные вычисления / Д. Голуб, Ч. В. Лоун. — Мир, 1999.
- [7] *Дмитrochenко, О. Н.* Эффективные методы численного моделирования динамики нелинейных систем абсолютно твердых и деформируемых тел: Дис. . . канд. физ. мат. наук: 01.02.01. — М., 2003. — 125 с.
- [8] *Дмитrochenко, О. Н.* Моделирование геометрически нелинейных упругих стержневых систем твёрдотельными конечными элементами / О. Н. Дмитrochenко, Н. Н. Михайлов, Д. Ю. Погорелов // Динамика и прочность транспортных машин. Сб. научн. трудов под ред. В.И.Сакало. — Брянск: БГТУ, 1998. — С. 33–39.
- [9] *Колесников, К. С.* Динамика разделения ступеней летательных аппаратов / К. С. Колесников, В. И. Козлов, В. В. Кокушкин. — Машиностроение, 1977.
- [10] *Лилов, Л. К.* Моделирование систем связанных тел / Л. К. Лилов. — М.: Наука, 1993.
- [11] *Михеев, Г. В.* Компьютерное моделирование динамики систем абсолютно твердых и упругих тел, подверженных малым деформациям: Дис. . . канд. техн. наук: 01.02.06. — Брянск, 2004. — 155 с.

- [12] *Новиков, Ф. А.* Дискретная математика для программистов /  
Ф. А. Новиков. — Питер, 2001.